
Aufgabe 1 : Lokales Inertialsystem **(7 Punkte)**

Wir betrachten eine Mannigfaltigkeit M, beschrieben durch n Koordinaten x^μ mit der positiv definiten Metrik $g_{\mu\nu}$. Sei $A^\mu(x)$ ein kontravariantes Vektorfeld auf M. In der Vorlesung wird gezeigt, dass $\mathrm{D}A^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}A^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\, A^\rho\, \mathrm{d}x^\sigma$ ebenfalls ein kontravariantes Vektorfeld ist.

Es wird auf n neue Koordinaten $\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x)$ transformiert.

a) Berechnen Sie, ausgehend von $\mathrm{D}\bar{A}^\mu = \partial\bar{x}^\mu/\partial x^\nu\, \mathrm{D}A^\nu$ (warum?), das Transformationsverhalten der Koeffizienten des affinen Zusammenhangs. (2 Punkte)

Ergebnis:

$$\bar{\Gamma}^\nu_{\kappa\lambda} = \frac{\partial\bar{x}^\nu}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^\kappa}\frac{\partial x^\beta}{\partial\bar{x}^\lambda}\,\Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\bar{x}^\kappa\partial\bar{x}^\lambda}\right]. \tag{1}$$

b) Sei $P(x)$ ein beliebiger, fester Punkt auf der Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es ein Koordinatensystem $\bar{x}^\mu$ auf M mit P als Ursprung gibt, in dem die Zusammenhangskoeffizienten in P verschwinden, (2 Punkte)

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}(P) = 0\,. \tag{2}$$

Anleitung: Betrachten Sie die Transformation $x^\mu = \bar{x}^\mu + \frac{1}{2}\,Q^\mu_{\alpha\beta}\,\bar{x}^\alpha\,\bar{x}^\beta$ mit bezüglich der unteren Indizes symmetrischer Matrix Q und setzen Sie dies in die mit $\partial x^\gamma/\partial\bar{x}^\nu$ multiplizierte Gleichung (1) ein.

c) Zeigen Sie, dass aus (2) für alle Indizes α, μ, ν folgt: (1 Punkt)

$$\left.\frac{\partial\,\bar{g}_{\mu\nu}}{\partial\bar{x}^\alpha}\right|_{\bar{x}=0} = 0\,. \tag{3}$$

d) Begründen Sie, warum die Koordinaten $\bar{x}$ linear auf Koordinaten $\tilde{x}$ transformiert werden können, dass in P die Metrik die Form

$$\tilde{g}_{\mu\nu}|_{\bar{x}=P} = \delta_{\mu\nu} \tag{4}$$

annimmt, wobei die Eigenschaften (2) und (3) erhalten bleiben. [Die Eigenschaften (2), (3) und (4) definieren den Begriff eines *lokalen Inertialsystems*.] (1 Punkt)

e) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung von P die Metrik dann in den Koordinaten $\tilde{x}$ geschrieben werden kann als (1 Punkt)

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\,\tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial\tilde{x}^\alpha\partial\tilde{x}^\beta}\right)_{\tilde{x}=0}\tilde{x}^\alpha\,\tilde{x}^\beta\,. \tag{5}$$

Aufgabe 2 : Riemannscher Krümmungstensor (schriftlich) (5 Punkte)

Gegeben sei das metrische Tensorfeld

$$g = dx \otimes dx + \cos\left[u(x,t)\right] dx \otimes dt + \cos\left[u(x,t)\right] dt \otimes dx + dt \otimes dt. \tag{6}$$

u sei dabei eine stetige Funktion von x und t. Berechnen Sie den

a) Riemannschen Krümmungstensor, (2 Punkte)

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} \tag{7}$$

b) Ricci-Tensor, (2 Punkte)

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \tag{8}$$

c) und zuletzt das Krümmungsskalar. (1 Punkte)

$$R = R^\mu{}_\mu \tag{9}$$

Abgabe der schriftlichen Aufgabe in der ersten Übung.

Scheinkriterien

Zur Erlangung des Übungsscheins zur Vorlesung sind die folgenden Kriterien zu erfüllen:

- Aktive Teilnahme an allen Übungsterminen,
- Mindestens 60% der Punkte bei den schriftlichen Aufgaben,
- Mindestens 60% der Punkte bei den zu votierenden Aufgaben,
- Mindestens 2x Vorrechnen.