
Aufgabe 3 : Inhomogene Felder und Äquivalenzprinzip (20 Punkte)

Nach dem Äquivalenzprinzip laufen mechanische Vorgänge in einem kleinen, frei fallenden Labor ebenso ab wie in einem Newtonschen Inertialsystem. In dieser Aufgabe sollen Sie im Rahmen der Newtonschen Mechanik untersuchen, welche Auswirkungen die endliche Größe eines im inhomogenen Gravitationsfeld fallenden Labors hat.

Betrachten Sie dazu zwei Körper, die im Abstand $r_1(t)$ und $r_2(t) = r_1(t) + \xi(t)$ radial auf eine Punktmasse M zufallen. Wäre das Äquivalenzprinzip exakt erfüllt, so wäre $\xi(t)$ konstant.

a) Leiten Sie aus der Newtonschen Bewegungsgleichung ab, dass für kleine ξ näherungsweise gilt

$$\ddot{\xi} = c^2 \frac{r_\mathrm{s}}{r^3}\, \xi,$$

wobei $r_\mathrm{s} = \frac{2GM}{c^2}$. (10 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass sich der Abstand ξ der beiden Körper während einer kurzen Beobachtungszeit t um

$$\Delta\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^3 \left(\frac{ct}{r_\mathrm{s}}\right)^2 \xi_0 \tag{1}$$

verändert, wenn ξ_0 der ursprüngliche Abstand ist. Wenn $\Delta\xi$ kleiner ist als die erreichbare Messgenauigkeit, kann man das Labor als „klein“ ansehen. (8 Punkte)

c) Berechnen Sie $\Delta\xi$ für eine Labor der Größe $\xi_0 = 100\,\mathrm{m}$ auf der Erdoberfläche für Beobachtungszeiten t von 1 s und 60 s. (2 Punkte)

Aufgabe 4 : Lichtablenkung und Äquivalenzprinzip (10 Punkte)

Wir betrachten ein frei fallendes Labor im Schwerefeld, z.B. einen Fahrstuhl, dessen Haltekabel durchtrennt wurden. Ein Lichtstrahl werde von einer Seite des Labors in eine Richtung senkrecht zur Richtung des lokalen Schwerefeldes geschickt.

a) Begründen Sie mit Hilfe des Äquivalenzprinzips, dass sich das Licht im Labor geradlinig mit Geschwindigkeit c ausbreitet. (5 Punkte)

b) Auf welcher Bahn verläuft das Licht von außen gesehen? Um welche Länge „fällt” ein horizontal ausgeschickter Strahl bei lokal konstanter und paralleler Erdbeschleunigung g, wenn das Labor 1 km breit ist? (5 Punkte)

Aufgabe 5 : Einfache Darstellungen des Krümmungstensors
(schriftlich, 30 Punkte)

In der Vorlesung wurden der Riemannsche Krümmungstensor $R^{\mu}_{\beta\gamma\delta}$, der Ricci-Tensor $R_{\beta\delta} = R^{\mu}_{\beta\mu\delta}$ sowie der Ricci-Skalar $R = g^{\delta\beta}R_{\beta\delta}$ eingeführt. In Räumen mit weniger als vier Dimensionen können einfache Ausdrücke des Krümmungstensors gefunden werden, die allein auf der Metrik, dem Ricci-Tensor und dem Ricci-Skalar beruhen.

a) Zeigen Sie, dass die Relation

$$g_{\alpha\eta}g^{\eta\beta}{}_{,\gamma} = -g^{\eta\beta}g_{\alpha\eta,\gamma} = -g^{\eta\beta}(\Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha}g_{\sigma\eta} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\eta}g_{\sigma\alpha}) \tag{2}$$

gilt und verwenden Sie sie, um nachzurechnen, dass die kovarianten Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors sich auf die Form

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta}\right) + g_{\eta\sigma}\left(\Gamma^{\eta}_{\alpha\delta}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\delta}\right) \tag{3}$$

bringen lassen. Vergewissern Sie sich, dass die Symmetrien

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{4a}$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \tag{4b}$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \tag{4c}$$

erfüllt sind. (8 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass unter Berücksichtigung der Symmetrien (4a) bis (4c) in einem n-dimensionalen Raum

$$K_n = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \tag{5}$$

unabhängige Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors verbleiben. (6 Punkte)

c) Wie lautet der Riemannsche Krümmungstensor in einem eindimensionalen Raum? (2 Punkte)

d) In zwei Dimensionen hat der Riemannsche Krümmungstensor gerade eine unabhängige Komponente. Diese muss sich auf den Ricci-Skalar zurückführen lassen. Bilden Sie dazu aus Termen quadratisch in der Metrik einen möglichst einfachen Tensor, der mit den Symmetrien (4a) bis (4c) verträglich ist. Bestimmen Sie den bis jetzt noch freien Vorfaktor dieses Tensors so, dass seine Kontraktion auf den Ricci-Skalar führt. (4 Punkte)

e) Nutzen Sie Ihr bisher erworbenes Wissen, um möglichst einfach alle Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors der zweidimensionalen Raumzeit

$$ds^2 = \frac{4}{(1+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\phi^2) \tag{6}$$

zu berechnen. (4 Punkte)

f) In einem dreidimensionalen Raum hat der Riemannsche Krümmungstensor gerade so viele unabhängige Komponenten wie der Ricci-Tensor (symmetrische Matrix!). Es liegt nahe, anzunehmen, dass man den Krümmungstensor aus Linearkombinationen des Ricci-Tensors gewinnen kann. Bilden Sie unter Zuhilfenahme der Metrik eine Linearkombination des Ricci-Tensors, die mit den Symmetrien (4a) bis (4c) verträglich ist und bestimmen Sie alle noch freien Koeffizienten so, dass sich die richtigen Kontraktionen ergeben. Welchen Term müssen Sie Ihrem Ansatz hinzufügen, damit das funktioniert? (6 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe in den Übungen am 3. Mai 2017.