

Aufgabe 6 : Kosmologisches Glied

((a) - (e) schriftlich, 30 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das mit der Forderung der Divergenzfreiheit verträgliche Feldgesetz der Gravitation die Form

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1)$$

annimmt. Der Term $\Lambda g_{\mu\nu}$ bewirkt im Newtonschen Grenzfall eine Modifikation des Gravitationsgesetzes.

- a) Welche Dimension muss die Konstante Λ haben? (4 Punkte)
- b) Zeigen Sie, dass aus (1) folgt: $R = 4\Lambda - \kappa T$. (4 Punkte)
- c) Wir betrachten den Newtonschen Grenzfall, der wie folgt charakterisiert ist:
- i) $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, wobei die $h_{\mu\nu}$ von erster Ordnung klein sind ($h_{\mu\nu} = \epsilon \tilde{h}_{\mu\nu}$, $\epsilon \ll 1$ Ordnungsparameter). Insbesondere ist $g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2$.
 - ii) Die $h_{\mu\nu}$ sind zeitlich schwach veränderlich, $\partial_0 h_{\mu\nu} \approx 0$.
 - iii) Die Ableitungen $\partial_i h_{\mu\nu}$ sind klein von Ordnung ϵ .
 - iv) Teilchengeschwindigkeiten sind nichtrelativistisch, d. h. $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$.

Wie lautet demnach der Energie-Impulstensor $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$? (4 Punkte)

- d) Formulieren Sie die 00-Komponente von Gleichung (1) in Newtonscher Näherung. (4 Punkte)

Ergebnis (in niedrigster Ordnung von ϵ):

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2}\kappa c^2 (T + 2\Lambda/\kappa). \quad (2)$$

- e) Bestimmen Sie aus der Forderung, dass sich für $\Lambda = 0$ die Poisson-Gleichung der Gravitation ergeben soll, die Konstante κ . (4 Punkte)
- f) Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta\chi = \Lambda c^2$. Zeigen Sie, dass das Potential im Außenraum einer Massenverteilung der Gesamtmasse M damit lautet: $\Phi = -GM/r + \Lambda c^2 r^2/6$. (4 Punkte)
- g) Im Sonnensystem hat sich die Newtonsche Mechanik glänzend bewährt. Benutzen Sie diese Tatsache, um eine obere Schranke für $|\Lambda|$ abzuschätzen (Sonnenmasse $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg, Bahnradius des Pluto: $r = 6 \times 10^{12}$ m). (4 Punkte)

- h) Berechnen Sie daraus eine obere Schranke für die “Vakuum-Energiedichte” Λ/κ und vergleichen Sie diese mit der Massendichte des Universums, $\rho_0 = 10^{-27} \text{ kg/m}^3$.
(2 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe in den Übungen am 17. Mai 2017.