Aufgabe 11 : Effektiver Brechungsindex im Gravitationsfeld

(schriftlich, 10 Punkte)

a) Führen Sie im Schwarzschild-Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{1}$$

eine Transformation auf isotrope Koordinaten durch, indem Sie eine Radialkoordinate $\bar{r}$ definieren durch

$$r = \left(1 + \frac{r_\mathrm{s}}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r}\ . \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass das Linienelement die Gestalt

$$ds^2 = \left(\frac{1 - r_\mathrm{s}/4\bar{r}}{1 + r_\mathrm{s}/4\bar{r}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_\mathrm{s}}{4\bar{r}}\right)^4 d\bar{\boldsymbol{x}}^2 \tag{3}$$

mit

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \bar{r}\sin\theta\cos\varphi \\ \bar{r}\sin\theta\sin\varphi \\ \bar{r}\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

annimmt.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Metrik die lokale Lichtgeschwindigkeit v_Licht und zeigen Sie, dass für den Brechungsindex n in erster Ordnung in r_s/r gilt

$$n = \frac{c}{v_\mathrm{Licht}} = 1 + \frac{r_\mathrm{s}}{r}\ . \tag{5}$$

Aufgabe 12 : Effektives Schwarzschild-Potenzial (15 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Lagrange-Funktion für ein Teilchen in der Schwarzschild-Raumzeit für $\theta = \pi/2$ hergeleitet:

$$L = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = c^2. \tag{6}$$

a) Bestimmen Sie die Konstanten der Bewegung und das effektive Potenzial V_{eff}, indem Sie Gleichung (6) auf die Form

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mV_{\text{eff}} = K \tag{7}$$

bringen. Hierbei ist $K = E - mc^2$ die nichtrelativistische Gesamtenergie des Teilchens. Zwischenergebnis: $V_{\text{eff}} = \frac{-GM}{r} + \frac{L^2}{2m^2r^2} - \frac{r_sL^2}{2m^2r^3}$.

b) Berechnen Sie die Extrema des effektiven Potenzials V_{eff}. Für welche Werte der Radialkoordinate r sind die Teilchenbahnen stabil? Zeigen Sie, dass der minimale Bahnradius, bei dem eine stabile Kreisbahn existieren kann, gleich $r_{\text{min}} = \frac{L^2}{2GMm^2} = 3r_s$ ist. Skizzieren Sie das effektive Potenzial qualitativ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem Newton'schen Fall.

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_ϕ, mit der sich das Teilchen auf der Kreisbahn bei $r = r_{\text{min}}$ aus der Sicht eines stationären Beobachters bewegt. Wie groß ist die Periodendauer, die von einem lokalen Beobachter gemessen wird?

Aufgabe 13 : Maxwell-Gleichungen in der ART (15 Punkte)

Beim Übergang von der speziellen Relativitätstheorie zur allgemeinen Relativitätstheorie werden partielle Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzt. Vorsicht ist jedoch bei höheren Ableitungen geboten, da höhere Ableitungen nicht vertauschen. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass folgendes gilt:

$$\left(\nabla_\gamma\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\gamma\right)A^\mu = A^\mu_{;\beta\gamma} - A^\mu_{;\gamma\beta} = -R^\mu_{\alpha\beta\gamma}A^\alpha. \tag{8}$$

a) Betrachten Sie zuerst die homogenen Maxwell-Gleichungen der SRT:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} = 0. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass beim Übergang zur ART partielle und kovariante Ableitung identisch sind:

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} = F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\beta\gamma;\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{[\alpha\beta,\gamma]} = F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0. \tag{10}$$

Nutzen Sie dabei die Symmetrie der Christoffel-Symbole und die des Feldstärketensors aus. Geben Sie die Beziehung zwischen A_α und $F_{\alpha\beta}$ in der ART an.

b) Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen der SRT lauten:

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = \mu_0 j^\beta, \tag{11}$$

oder in Potenzialform mithilfe der Lorentz-Eichung:

$$\nabla\cdot A = A^\alpha{}_{,\alpha} = 0, \qquad \Box A = \partial^\beta\partial_\beta A^\alpha = A^\alpha{}_{,}{}^\beta{}_\beta = -\mu_0 j^\alpha. \tag{12}$$

Die erste Gleichung in (12) überträgt sich durch Ersetzen der partiellen Ableitung durch eine kovariante direkt in die ART. Berechnen Sie auch die entsprechende zweite Gleichung aus (12) für die ART. Setzen Sie hierzu das Vierer-Potenzial der ART in die inhomogene Maxwell-Gleichung der ART [aus (11)] ein. Zwischenergebnis:

$$A^{\alpha}{}_{;}{}^{\beta}{}_{\beta} - A^{\beta} R^{\alpha}{}_{\beta} = -\mu_0 j^{\alpha}. \tag{13}$$

c) Zeigen Sie, dass aus Gleichung (13) die Ladungserhaltung folgt:

$$j^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0. \tag{14}$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lassen sich in der ART wie folgt schreiben (ohne Beweis):

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) = \mu_0 j^{\beta}. \tag{15}$$

Dabei bezeichnet $g = \det(g_{\alpha\beta})$ die Determinante des Metriktensors. Ein Vorteil dieser Gleichung ist, dass keine Christoffel-Symbole berechnet werden müssen. Zusammen mit Gleichung (10) beschreiben sie die Elektrodynamik in beliebig gekrümmten Räumen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben in den Übungen am 21. Juni 2017.