
Aufgabe 17 : De-Sitter-Metrik (15 Punkte)

Die De-Sitter-Metrik wird beschrieben durch das Längenelement

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{2ct/l}\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)$$

mit einer Konstanten l.

a) Zeigen Sie, dass die De-Sitter-Metrik ein Spezialfall der Robertson-Walker-Metrik und damit eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichung

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

mit verschwindendem Energie-Impuls Tensor und positiver kosmologischer Konstante ist. Wie lauten die Parameter q und $a(t)$? Wie hängt l von $\Lambda > 0$ ab? (10 Punkte)

b) Bestimmen Sie aus der Einstein-Gleichung und dem Energiesatz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\sigma a^3\right) = -\frac{3}{c^2}pa^2$$

die Dichte σ und den Druck p in einem De-Sitter-Universum. (5 Punkte)

Hinweis: Die nicht verschwindenden Elemente des Ricci-Tensors in obiger Metrik sind:

$$R_{00} = -3c^2/l^2, \qquad R_{ii} = 3e^{2ct/l}/l^2, \quad i = 1,2,3.$$

Aufgabe 18 : Kritische kosmologische Konstante (15 Punkte)

Die Friedmann-Gleichung (mit kosmologischer Konstante $\Lambda \neq 0$) lautet:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\,G\sigma_0 a^3(t_0)\cdot\frac{1}{a(t)} - qc^2 + \frac{\Lambda}{3}\,c^2\,a^2(t)$$

mit der heutigen Massendichte σ_0.

a) Zeigen Sie, dass für positive Krümmung ein Urknall vermieden werden kann, wenn gilt:

$$0 < \Lambda < \Lambda_c = \frac{c^4}{(4\pi G\sigma_0 a^3(t_0))^2}$$

Skizzieren Sie für diesen Fall den Verlauf der Funktion $\dot{a}(a)$ und markieren Sie in Ihrer Skizze den minimalen Radius, den das Universum annehmen kann. (10 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für positive Krümmung und $\Lambda = \Lambda_c$ ein statisches Universum möglich ist. Ist die Lösung stabil? (5 Punkte)

Aufgabe 19 : Hawking-Penrose-Theorem (10 Punkte)

a) Leiten Sie aus der allgemeinen Friedmann-Gleichung

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\,G\sigma a^2 - qc^2 + \frac{\Lambda}{3}\,c^2\,a^2(t)$$

die Bewegungsgleichung $\ddot{a} = F(a,t)$ mit der Hilfe der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma a^3) = -\frac{p}{c^2}\cdot 3a^2\dot{a}$$

(Energieerhaltung) her. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie: Gilt für alle Zeiten $\sigma + \frac{3p}{c^2} - \frac{\Lambda c^2}{4\pi G} > 0$, dann gab es vor endlicher Zeit einen Urknall. (5 Punkte)