Übungen zur Vorlesung **WS 2017/18**
Gruppentheoretische Methoden der Physik I **Blatt 1**

Ausgabedatum: 19. 10. 2017

Aufgabe 1 (Votier): Einfache Folgerungen aus den Gruppenaxiomen **(6 Punkte)**

a) Zeigen Sie, ausgehend von der Definition einer Gruppe, dass gilt:

- linksinverses Element = rechtsinverses Element
- linksneutrales Element = rechtsneutrales Element
- Das neutrale Element ist eindeutig.
- Das inverse Element ist eindeutig.
- $\forall a, b \in \mathcal{G}$: $(a^{-1})^{-1} = a$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (2 Punkte)

b) Sei $a \in \mathcal{G}$ fest, $x \in \mathcal{G}$ durchlaufe alle Elemente der Gruppe. Zeigen Sie, dass dann ax bzw. xa auch alle Gruppenelemente durchläuft. Welche Konsequenz hat diese Eigenschaft für die Gruppentafel? (2 Punkte)

c) Bleiben obige Folgerungen richtig, wenn man statt der Existenz von Linksneutralem und Linksinversen die Existenz von *Links*neutralem und *Rechts*inversen (oder umgekehrt) fordert?
(2 Punkte)

Aufgabe 2 (Votier): Zur Permutationsgruppe **(7 Punkte)**

Wir betrachten die Menge S der bijektiven Abbildungen f einer endlichen Menge X auf sich selbst. Eine solche Abbildung f heißt Permutation. Die Menge S der Permutationen bildet bezüglich der Hintereinanderausführung als Operation eine Gruppe (o.B.). Bezeichnen wir die Elemente der Menge X mit natürlichen Zahlen, also $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$, so lässt sich eine Permutation in offensichtlicher Weise wie folgt darstellen:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_n \end{pmatrix},$$

d.h. 1 wird auf f_1 abgebildet, 2 auf f_2, und so weiter.
Neben dieser Schreibweise gibt es die sogenannte Zyklenschreibweise, die man am besten an einem Beispiel erläutert:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (132)(45).$$

Mit einer beliebigen Zahl startend schreibt man rechts daneben die Zahl, auf die sie abgebildet wird, hier also: 1 auf 3, 3 auf 2. Da die 2 auf die 1 abgebildet wird, die den Zyklus begonnen hat, schließt man die Klammer und beginnt einen neuen Zyklus: die 4 wird auf die 5 abgebildet und die 5 auf die 4.
In der Zyklenschreibweise lässt man Zahlen, die auf sich selbst abgebildet werden, meist ganz weg:

$$f = (123)(4)(5) = (123).$$

a) Schreiben Sie die folgenden Permutationen in Zyklenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1 Punkt)

b) Schreiben Sie die folgenden Permutationen in Abbildungsschreibweise:

$$(165)(234), \quad (34), \quad (12)(36)(45).$$

(1 Punkt)

c) Bilden Sie die folgenden Permutationsprodukte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (135)(46) \circ (12)(36)(45), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ (13).$$

(Vereinbarungsgemäß wird die rechts stehende Permutation zuerst ausgeführt.) (1 Punkt)

d) Berechnen Sie die Inverse der folgenden Permutationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad (125)(46), \quad (13579)(246).$$

(1 Punkt)

e) Eine Transposition ist eine Permutation, die nur zwei Elemente vertauscht, z.B. (35). Jede Permutation kann als Produkt von Transpositionen dargestellt werden, z.B. $(132) = (12) \circ (13)$. Besteht die Zerlegung einer Permutation aus einer geraden Anzahl von Transpositionen, so hat die Permutation eine gerade oder positive Parität, bei einer ungeraden Anzahl von Transpositionen eine ungerade oder negative Parität.

Zerlegen Sie die folgenden Permutationen in ein Produkt von Tanspositionen und geben Sie die Parität der Permutation an:

$$(142)(35), \quad (15324), \quad (1435)(276).$$

(1 Punkt)

Bemerkung: Die Zerlegung einer Permutation in Transpositionen ist nicht eindeutig, auch nicht die Anzahl der Transpositionen, wohl aber die Parität der Permutation (o.B.).

f) Bilden Sie die Potenzen $f^i = f \circ f \circ ... \circ f$ von $f = (15472)(36)$. Für welches n gilt $f^n = e$? In welchem Zusammenhang steht n mit der Zyklenschreibweise von f? Bildet die Menge $\{f^1, f^2, ..., f^n\}$ eine Gruppe? Wie lautet f^{-1}? Ist die so erzeugte Gruppe abelsch?

(2 Punkte)

Bemerkung: Eine Gruppe, deren Elemente Potenzen g^i eines Elementes g sind, nennt man die von g erzeugte zyklische Gruppe.