Klassische Mechanik (SS 2018) – Blatt 10

Aufgabe 28: Streutheorie (15 Punkte)
Zur Anwendung eines klassischen Zentralkraftproblems wollen wir uns die Streuung zweier Teilchen genauer anschauen. Die Streutheorie hat in der mikroskopischen Physik eine große Bedeutung. Man kann mit ihr Wechselwirkungen, Energieniveaus, Ausdehnungen und innere Strukturen atomarer und subatomarer Teilchen erforschen, indem man die Teilchen aufeinander schießt, miteinander wechselwirken lässt und anschließend die Bahn der gestreuten, also wieder auseinander laufenden Teilchen in Abhängigkeit der Energie und anderer Parameter analysiert. Die untersuchten Objekte sind vorwiegend Moleküle, Atome, Atomkerne oder Elementarteilchen. Die meisten Erkenntnisse in der Elementarteilchenphysik wurden durch Streuexperimente gewonnen. Die großen Forschungseinrichtungen wie CERN in Genf oder DESY in Hamburg nutzen solche Experimente.
Zunächst betrachten wir die Streuung zweier Teilchen der Massen m_1 und m_2 mit kugelsymmetrischem Wechselwirkungspotential $V(r)$, wobei r den Abstand der beiden Teilchen angibt und $V(r)$ für $r \to \infty$ mindestens wie $1/r$ abfällt. Im Laborsystem (linkes Bild) ist Teilchen 2 zunächst in Ruhe. Teilchen 1 nähert sich mit der Geschwindigkeit v_∞ aus dem Unendlichen. Nach dem Streuprozess bewegen sich beide Teilchen auf Asymptoten voneinander weg. Diese sind gegen die ursprüngliche Einfallsrichtung des Teilchens um θ_L bzw. Ψ_L geneigt. Der senkrechte Abstand des Teilchen 1 zwischen Anfangsgeschwindigkeit v_∞ und dem Kraftzentrum wird Stoßparameter s genannt.

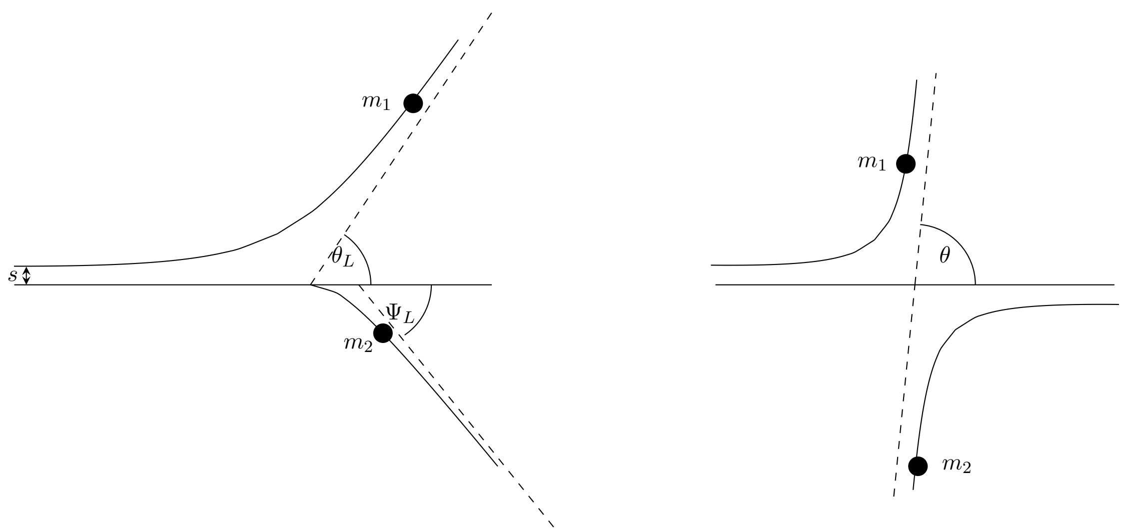

Abbildung 1: Zweiteilchen-Streuung im Laborsystem (links) und im Schwerpunktsystem (rechts).

In realen Experimenten ruht jedoch keines der Teilchen. Wir betrachten daher das Schwerpunktsystem (rechtes Bild). Hier bewegen sich die Teilchen lange nach dem Stoß auf Asymptoten, die bezüglich der Einfallsrichtung um θ geneigt sind. Jedoch ist $\theta_L \neq \theta$.
Wir nutzen unser Wissen über Zwei-Körper-Probleme um Beziehungen zwischen dem Schwerpunktsystem und dem Laborsystem herzuleiten.

(a) Geben Sie die reduzierte Masse m als Funktion der Teilchenmassen m_1 und m_2 an. Bestimmen Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_{SL}$ und die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{SL}$ des Schwerpunktes im Laborsystem. Zeichnen Sie ein Diagramm, aus dem hervorgeht, wie die Geschwindigkeit von Teilchen 1 nach der Streuung im Laborsystem mit der im Schwerpunktsystem zusammenhängt. Mit Hilfe trigonometrischer Überlegungen können Sie nun einen Zusammenhang zwischen θ_L und θ herleiten. (2 Punkte)

Wir betrachten nun das Schwerpunktsystem und wollen θ in Abhängigkeit des Stoßparameters s und der Geschwindigkeit v_∞ berechnen.

(b) Im Zentralkraftfeld $V(r)$ ist die Bewegung des Teilchen 1 symmetrisch bezüglich des Perihels. Machen Sie sich dies durch eine Skizze klar und finden Sie einen Zusammenhang zwischen θ und dem Winkel φ_0 im Perihel der Bahn. Bestimmen Sie die Energie und den Drehimpuls von Teilchen 1. Nutzen Sie Ihr Wissen über Kegelschnitte und Perihelwinkel aus der Vorlesung, um $\theta(s,v_\infty)$ zu bestimmen. Bedenken Sie dabei das effektive Potential!
Hinweis: Das Integral muss nicht berechnet werden. (5 Punkte)

In realen Experimenten werden für eine aussagekräftigere Statistik anstatt einzelner Teilchen homogene Teilchenstrahlen am Target (Teilchen 2) gestreut. Es sei N_0 die Zahl der pro Zeit- und Flächeneinheit einfallenden Teilchen und $\mathrm{d}N$ die Zahl der pro Zeiteinheit in das Winkelintervall $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$ gestreuten Teilchen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma$ stellt ein Maß für die Streuung am Potential $V(r)$ dar und ist durch $\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}N}{N_0}$ definiert.

(c) Der differentielle Wirkungsquerschnitt kann jedoch auch als Fläche aufgefasst werden. Er ist ein Teil der Fläche, die senkrecht zum einfallenden Teilchenstrahl steht. Parametrisieren Sie $\mathrm{d}\sigma$ in Zylinderkoordinaten und drücken Sie dann $\mathrm{d}\sigma$ durch den Stoßparameter s aus. Des Weiteren betrachten wir den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$, in den die Teilchen gestreut werden. Drücken Sie $\mathrm{d}\Omega$ in Kugelkoordinaten aus. Zeichnen Sie eine Skizze, in der $\mathrm{d}\sigma$ und $\mathrm{d}\Omega$ anschaulich werden. Geben Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt pro Raumwinkel $\mathrm{d}\sigma/\,\mathrm{d}\Omega$ an. (3 Punkte)

Ein wichtiger Spezialfall der Streutheorie ist durch die Rutherfordsche Streuformel gegeben. Sie beschreibt die Streuung geladener Teilchen im Coulomb-Feld $V(r) = -\kappa/r$. Nehmen Sie den Spezialfall $m_2 \gg m_1$ an und berechnen Sie $\mathrm{d}\sigma/\,\mathrm{d}\Omega$, indem Sie

(d) das Integral aus (b) mit einer geeigneten Substitution lösen. Für die Bestimmung des minimalen Abstandes r_0 müssen Sie Energie und Drehimpuls betrachten. Formen Sie das Ergebnis um, so dass Sie $s(\theta)$ erhalten. Nun kann $\mathrm{d}\sigma/\,\mathrm{d}\Omega$ einfach berechnet werden. (5 Punkte)

Rutherford, Geiger und Marsden führten von 1906 bis 1913 Streuexperimente von α-Teilchen an wenige μm dicker Goldfolie durch. Die Zählraten konnten nur erklärt werden, weil Rutherford die gesamte Masse des Goldatoms im Kern vereinigte, der als Streuzentrum diente. Bis dahin wurde angenommen, dass die Masse im ganzen Atom gleich verteilt ist. Es zeigte sich zudem, dass die Coulombkraft mindestens bis zu einem Abstand von $4{,}14 \cdot 10^{-14}$ m vom Kernmittelpunkt gültig ist. Daher muss der Radius des Goldkerns kleiner als $4{,}14 \cdot 10^{-14}$ m sein. Rutherford legte somit den Grundstein zu unserem heutigen Verständnis des Atomaufbaus.

Aufgabe 29: Trägheitstensoren einfacher Körper (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor für einen Zylinder der Masse m, Höhe z_0 und Radius R. Der Mittelpunkt der Grundfläche befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems. (2 Punkte)

(b) Es liegen drei Massepunkte der Masse m in der x-y-Ebene. Die drei Massen haben alle den gleichen Abstand y_0 vom Koordinatenursprung und bilden ein gleichseitiges Dreieck, eine der Massen werde hierbei auf die y-Achse gelegt. Eine vierte Masse M befindet sich auf der z-Achse mit Abstand z_0 vom Ursprung. Zeichnen Sie eine Skizze des Körpers und berechnen Sie dessen Trägheitstensor. (3 Punkte)