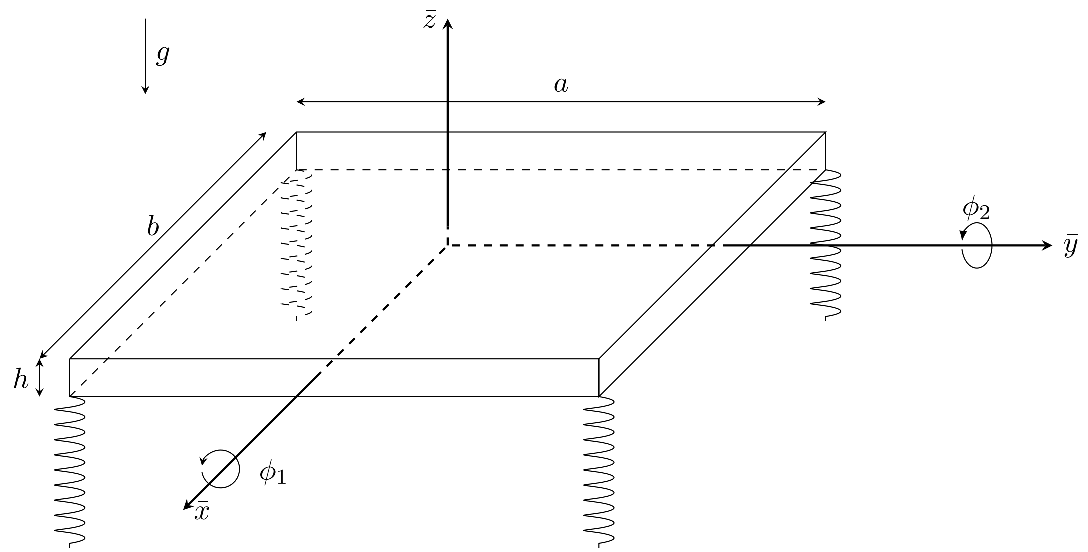
Aufgabe 30: Satz von Steiner (5 Punkte)

Es seien $J_{\mu\nu}^{(S)}$ die Komponenten des Trägheitstensors eines Körpers K der Masse M bezüglich eines körperfesten Koordinatensystems, dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt S zusammenfällt. Weiterhin seien $J_{\mu\nu}^{(P)}$ die Komponenten des Trägheitstensors bezüglich eines um den Vektor $\boldsymbol{a}$ parallel verschobenen Koordinatensystems. Beweisen Sie den Satz von Steiner, der besagt, dass diese Komponenten folgendermaßen zusammenhängen:

$$J_{\mu\nu}^{(P)} = M\left(a^2\delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu\right) + J_{\mu\nu}^{(S)} \tag{1}$$

Aufgabe 31: Schwingende Platte (8 Punkte)



Wir betrachten eine quaderförmige Platte der Länge a, Breite b, Dicke h und Masse M, die sich im homogenen Schwerefeld der Erde befindet und an den Eckpunkten ihrer Unterseite auf vier identischen Federn mit Federkonstante k gelagert ist. Die Federn können sich nur vertikal bewegen. Im Gleichgewicht falle der Koordinatenursprung des eingezeichneten Koordinatensystems $\bar{S}$ mit dem Schwerpunkt zusammen.

(a) Führen Sie die beiden Drehwinkel ϕ_1 und ϕ_2 um die $\bar{x}$- bzw. $\bar{y}$-Achse, sowie den Abstand z des Schwerpunkts der Platte vom Ursprung des Koordinatensystems als generalisierte Koordinaten ein. Geben Sie die Lagrangefunktion $L(z,\phi_1,\phi_2,\dot{z},\dot{\phi}_1,\dot{\phi}_2)$ für kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage an, d. h. berücksichtigen Sie nur lineare und quadratische Terme und nähern Sie $\sin\phi_i \approx \phi_i$. (4 Punkte)

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab und lösen Sie diese für allgemeine Anfangsbedingungen. (4 Punkte)

Aufgabe 32: Teilchen auf bewegter Platte (7 Punkte)
Wir betrachten ein Punktteilchen der Masse m, welches im homogenen Schwerefeld der Erde reibungsfrei auf der Oberfläche einer ebenen, bewegten Platte gleitet. Um die Bewegung der Platte zu beschreiben, führen wir ein Inertialsystem $\bar{S}$ und ein mitbewegtes Bezugssystem S ein, dessen x-y-Ebene ständig mit der Plattenoberfläche zusammenfällt. Die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{\bar{\alpha}}$ und $\boldsymbol{e}_\alpha$ ($\alpha = x,y,z$) von $\bar{S}$ bzw. S sind zu jedem Zeitpunkt t durch die Transformation

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \mathrm{e}^{\phi(t) J_{\bar{x}}} \boldsymbol{e}_{\bar{\alpha}} \quad \text{mit} \quad \phi(t) = A \sin \omega t \quad (0 < A < \pi,\ 0 < \omega) \tag{2}$$

verbunden. Hierbei ist $J_{\bar{x}}$ der infinitesimale Generator von Drehungen um die $\bar{x}$-Achse (vgl. Aufg. 21). Der Vektor $\boldsymbol{g}$ der Fallbeschleunigung zeige in Richtung $-\boldsymbol{e}_{\bar{z}}$.

(a) Führen Sie die x- und y-Koordinate des Teilchens im bewegten System als generalisierte Koordinaten ein und stellen Sie die Lagrangefunktion $L(x,y,\dot{x},\dot{y},\phi)$ für die Bewegung des Teilchens auf. (4 Punkte)

(b) Gehen Sie durch Legendre-Transformation zur Hamiltonfunktion $H(x,y,p_x,p_y,\phi)$ über. Zeigen Sie explizit, dass H nicht identisch mit der Gesamtenergie $E = T + V$ ist. Leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ab. (3 Punkte)