Klassische Mechanik (SS 2018) – Blatt 12

Aufgabe 33: Eichtransformation als kanonische Transformation (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Eichtransformation der Lagrangefunktion

$$L(q,\dot{q},t) \to L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q,t) = L + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{1}$$

eine kanonische Transformation ist. Berechnen Sie die Erzeugende F_2 dieser Transformation und die neue Hamiltonfunktion K. (5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Eichtransformation

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla f(\boldsymbol{r},t), \quad \Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{\partial f(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{2}$$

des elektromagnetischen Feldes eine kanonische Transformation für die Koordinaten und Impulskomponenten des geladenen Teilchens ist. Konstruieren Sie die Erzeugende $F_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}, t)$ und die neue Hamiltonfunktion.
Hinweis: Die Hamiltonfunktion zu diesem Problem ist aus Aufgabe 26 bekannt. (5 Punkte)

Aufgabe 34: Kinematischer Impuls und nicht kanonische Transformation (5 Punkte)

Die Hamiltonfunktion eines Punktteilchens der Masse m und Ladung q, welches sich in einem zeitlich konstanten, elektromagnetischen Feld mit Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ und skalarem Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$ bewegt, ist durch

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},\Phi,\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2 + q\Phi(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

gegeben, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Wir gehen nun mit Hilfe der naiven Transformation

$$r_\alpha \to Q_\alpha = r_\alpha, \quad p_\alpha = P_\alpha = p_\alpha - \frac{q}{c}A_\alpha, \quad \alpha = x,y,z \tag{4}$$

zu den neuen Koordinaten und Impulsen über.
Geben Sie die neue Hamiltonfunktion $\bar{H}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \Phi, \boldsymbol{A})$ an. Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$, $\{Q_\alpha, P_\beta\}$ und $\{P_\alpha, P_\beta\}$ für alle $\alpha, \beta = x,y,z$ und begründen Sie, warum die Transformation (4) nicht kanonisch ist. Geben Sie die Bewegungsgleichungen für Q_α und P_α an.

Aufgabe 35: Poisson-Klammern und Drehimpulse (5 Punkte)

Wir betrachten ein Punktteilchen der Masse m im Zentralpotential $V(q)$ in kartesischen Koordinaten.

(a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion $H = H(\{p_\alpha\},\{q_\alpha\})$ mit $\alpha = x,y,z$ auf. (1 Punkt)

(b) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Funktion $f(\{p_\alpha\},\{q_\alpha\})$

$$\{l_\alpha, f\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(-q_\beta \frac{\partial f}{\partial q_\gamma} + p_\gamma \frac{\partial f}{\partial p_\beta}\right) \tag{5}$$

gilt, wobei l_α die α-Komponente des Drehimpulses $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}$ ist.
Hinweis: Beachten Sie die Einsteinsche Summenkonvention! (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass für einen Vektor $\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{q} + c_2\boldsymbol{p} + c_3\boldsymbol{l}$ mit beliebigen Konstanten $c_{1,2,3}$ die Relation

$$\{l_\alpha, w_\beta\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} w_\gamma \tag{6}$$

und damit insbesondere $\{l_\alpha, l_\beta\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\gamma$ gilt.
Hinweis: Es ist $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$. (2 Punkte)