Klassische Mechanik (SS 2018) – Blatt 2

Aufgabe 4: Nicht-konservative Kraft (3 Punkte)
Auf ein Teilchen wirke die Kraft

$$\boldsymbol{F}(r) = \frac{a}{r}\boldsymbol{e}_\phi, \tag{1}$$

mit dem Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_\phi$ in ϕ-Richtung in Zylinderkoordinaten.

(a) Berechnen Sie die Arbeit an einem Teilchen, das eine geschlossene Kreisbahn mit Radius R um den Ursprung des Systems ausführt. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Rotation $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ der Kraft. Dieses Ergebnis scheint im Widerspruch zu (a) zu stehen. Wie können Sie diesen aufheben? (1 Punkt)

Aufgabe 5: Angetriebener gedämpfter HO (8 Punkte)
Die Bewegungsgleichungen eines angetriebenen gedämpften harmonischen Oszillators lauten

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t), \quad \gamma > 0 \tag{2}$$

$$F(t) = \sum_n f_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

(a) Welche Bedingungen müssen für die Fourierkoeffizienten f_n gelten, damit $F(t)$ reell ist? Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ an. Wie verhält sich die Lösung für große Zeiten? (4 Punkte)
Hinweis: Machen Sie einen Fourieransatz für die partikuläre Lösung.

(b) Betrachten Sie nun den Fall

$$f_1 = f_{-1} = \frac{F_0}{2}, \quad f_i = 0 \text{ für alle } i \neq \pm 1,$$

und für große Zeiten

$$t \gg \left(\frac{\gamma}{2m} - \mathrm{Re}\left[\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \right] \right)^{-1}.$$

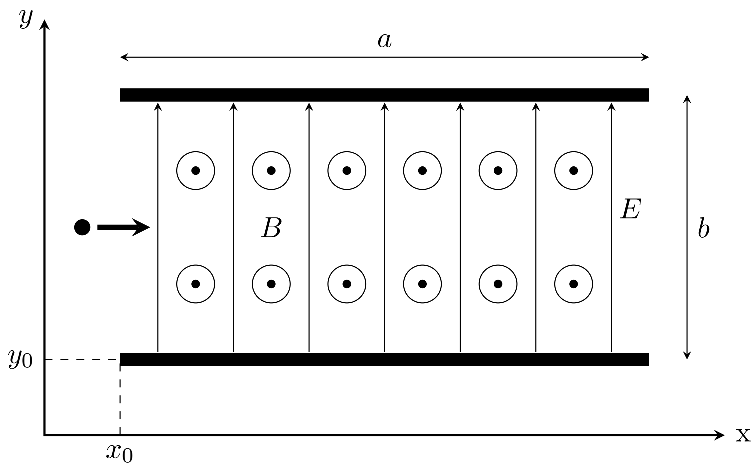
(i) Vereinfachen Sie ihr obiges Resultat für $x(t)$ für diesen Fall.

(ii) Bei welcher Frequenz ω wird die Schwingungsamplitude und bei welcher Frequenz die Geschwindigkeitsamplitude maximal?

(iii) Zeichnen Sie die Schwingungsamplitude über der Frequenz ω. Nutzen Sie dazu ein grafisches Programm (Gnuplot, Mathematica, ...). (4 Punkte)

Aufgabe 6: Teilchen im Kondensator (9 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m und Ladung $q > 0$ bewege sich in der x-y-Ebene in einem homogenen elektrischen Feld $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_y$ ($E > 0$) eines Plattenkondensators. Zusätzlich wird die Ebene senkrecht von einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ ($B > 0$) durchsetzt. Es wirkt also die Lorentzkraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = q(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ (cgs-Einheiten).



(a) Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen auf und zeigen Sie, dass diese in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{C}(t) = 0 \quad (\boldsymbol{C}(t) \in \mathbb{R}^2) \tag{4}$$

geschrieben werden können. Identifizieren Sie zwei Erhaltungsgrößen und entkoppeln Sie mit deren Hilfe die Bewegungsgleichungen. (3 Punkte)

(b) Das Teilchen sei nun zur Zeit t_0 am Ort $(x_0, y_0 + \frac{b}{2})$ und habe die Geschwindigkeit (v_{x_0}, v_{y_0}) ($v_{x_0} \geq 0$). Bestimmen Sie die dazugehörigen Trajektorien $x(t)$,$y(t)$ ohne Berücksichtigung der Kondensatorplatten. (4 Punkte)

(c) Es sei nun $v_{x_0} = v_{y_0} = 0$. Für welche Werte von E verlässt das Teilchen den Kondensator bei $x_0 + a$ ohne zuvor mit einer Kondensatorplatte zu kollidieren? Ist es kollisionsfrei möglich, dass das Teilchen den Kondensator bei x_0 wieder verlässt? Skizzieren Sie qualitativ den Trajektorienverlauf für jeden möglichen Fall. (2 Punkte)