Klassische Mechanik (SS 2018) – Blatt 3

Aufgabe 7: Rotierendes Koordinatensystem (7 Punkte)
Bezüglich eines Inertialsystems S bewegt sich ein Teilchen gemäß $\boldsymbol{r} = v_0 t \boldsymbol{e}_y$. Wir betrachten nun ein Bezugssystem S', das sich gegenüber S mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um dessen z-Achse dreht. Die Koordinatenursprünge sollen dabei identisch sein, d. h. bei $t = 0$ fallen S und S' zusammen. Bestimmen Sie, wie diese Bewegung vom System S' aus aussieht. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Finden Sie den Zusammenhang zwischen den Basisvektoren der beiden Systeme. Geben Sie dann den Ortsvektor $\boldsymbol{r}'$ des Teilchens im System S' an. Skizzieren Sie die Bahn des Teilchens. (3 Punkte)

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens in S' auf und lösen Sie sie. Was fällt auf? *Hinweis: Die gekoppelten DGL lassen sich mittels $\mathcal{Z} = x' + \mathrm{i}y'$ zu einer DGL zusammenfassen und so einfach lösen.* (4 Punkte)

Aufgabe 8: Parabolische Koordinaten (6 Punkte)
Die parabolischen Koordinaten ξ, η und ϕ sind definiert gemäß

$$x = \sqrt{\xi\eta}\cos\phi, \quad y = \sqrt{\xi\eta}\sin\phi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \xi, \eta < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \tag{1}$$

(a) Diskutieren Sie die Koordinatenlinien, berechnen Sie die neuen Basisvektoren und stellen Sie den Ortsvektor in der neuen Basis dar. Berechnen Sie die Geschwindigkeit in der neuen Basis. (3 Punkte)

(b) Wie lautet das Volumenelement $\mathrm{d}V$? Berechnen Sie außerdem das Differential $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ und den Nabla-Operator in den parabolischen Koordinaten. (3 Punkte)

Aufgabe 9: Bahn eines Massepunkts (7 Punkte)
Der Ort eines Massepunkts als Funktion der Zeit t sei

$$\boldsymbol{r}(t) = (r_0\cos(\omega t))\boldsymbol{e}_x + (r_0\sin(\omega t))\boldsymbol{e}_y + v_0 t \boldsymbol{e}_z, \tag{2}$$

wobei r_0, ω und v_0 Konstanten sind.

(a) Welche geometrische Form hat die Bahn? Berechnen Sie die Bogenlänge, die der Massepunkt zwischen den Zeiten $t = 0$ und $t = T = 2\pi/\omega$ zurücklegt. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ und die Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{r}}$. Wie stehen diese Vektoren zur Bahn? (1 Punkte)

(c) Wir wechseln nun in eine Beschreibung der Bahn in Zylinderkoordinaten. Warum ist dies sinnvoll? Wie lauten Ort $\boldsymbol{r}$, Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}$ und Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{r}}$ in Zylinderkoordinaten? (2 Punkte)

(d) Bestimmen Sie das begleitende Dreibein $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$. Was bedeutet das Ergebnis für $\hat{\boldsymbol{b}}$? *Hinweis: Drücken Sie $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}/\mathrm{d}s$ durch die Beschleunigung aus.* (2 Punkte)