Klassische Mechanik (SS 2018) – Blatt 6

Aufgabe 15: Die Brachistochrone (Bernoulli 1696) (6 Punkte)
Die Brachistochrone ist diejenige Führungskurve $z = z(x)$, auf der ein Massepunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = -mg\boldsymbol{e}_z$ in kürzester Zeit von einem Startpunkt $A = (0{,}0)$ aus dem Ruhezustand heraus zu einem tiefer liegenden Zielpunkt $B = (a, -h)$ fällt.

(a) Führen Sie die Forderung kürzester Laufzeit in ein Variationsprinzip der Form

$$\int_0^a \mathcal{L}(z,z')\,\mathrm{d}x = \text{extremal} \tag{1}$$

über. (2 Punkte)

(b) Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung des Variationsprinzips an und zeigen Sie, dass für die Lösung die Größe

$$\mathcal{E} \equiv z' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} - \mathcal{L} \tag{2}$$

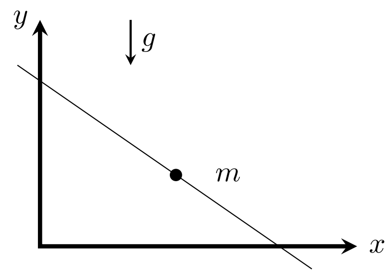
konstant ist. (2 Punkte)

(c) Benutzen Sie die Substitution $z = -c^2 \sin^2(\vartheta)$, um aus der Differentialgleichung $\mathcal{L}(z,z') =$ konst. eine Parameterdarstellung der Brachistochrone zu gewinnen. (2 Punkte)

Aufgabe 16: Die beschleunigte Ebene (6 Punkte)
Ein Massepunkt gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene, die in x-Richtung beschleunigt wird, sodass $a(t) = bt^2/2$, wie in der Abbildung gezeigt. Die Neigung α der schiefen Ebene ist konstant. Es gilt $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in geeigneten generalisierten Koordinaten auf. Leiten Sie damit die Bewegungsgleichung ab und lösen Sie diese. (3 Punkte)

(b) Nun soll das Problem mit Hilfe einer zweiten Methode gelöst werden. Stellen Sie hierfür die Zwangsbedingungen auf und verwenden Sie die Lagrange-Gleichung erster Art. Bestimmen Sie die Zwangskräfte. (3 Punkte)



Aufgabe 17: Hantel (4 Punkte)
Zwei durch eine starre, masselose Stange der Länge a verbundene Massepunkte m_1 und m_2 (Hantel) bewegen sich unter dem Einfluss der Schwerkraft im Raum. Lösen Sie das Bewegungsproblem mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen 1. Art und bestimmen Sie die Zwangskraft, wenn die Anfangsbedingungen lauten:

$$\boldsymbol{r}_1(0) = a\boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{r}_2(0) = 0, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_1(0) = v_{0x}\boldsymbol{e}_x + v_{0z}\boldsymbol{e}_z, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_2(0) = v_{0x}\boldsymbol{e}_x \tag{3}$$

Führen Sie zunächst Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ein. Den Lagrange-Parameter λ eliminieren Sie am besten unter zweifacher Verwendung der Zeitableitung.

Aufgabe 18: Invarianz der Lagrange-Funktion (4 Punkte)
Wir untersuchen im Folgenden zwei interessante und nützliche Invarianzen der Lagrange-Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung mit der Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ bezüglich einer Eichtransformation $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \mathcal{L}_0$ mit $\mathcal{L}_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\boldsymbol{q},t)$ invariant ist. (2 Punkte)

(b) Gegeben sei eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$, die von S generalisierten Koordinaten $q_1, \dots, q_S$ abhängt. Weiter sei eine differenzierbare und umkehrbare Abbildung gegeben, welche diese Koordinaten in den Satz $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_S$ überführt. Es gelte also $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_1, \dots, q_S, t)$ und $q_j = q_j(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_S, t)$, wobei $i,j = 1, \dots, S$.
Zeigen Sie: Unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\mathrm{d}q_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, S \tag{4}$$

gilt, so gilt auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\mathrm{d}\tilde{q}_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, S, \tag{5}$$

wobei die transformierte Lagrange-Funktion $\tilde{\mathcal{L}}$ durch

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\boldsymbol{q}},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}},t) = \mathcal{L}(\boldsymbol{q}(\tilde{\boldsymbol{q}},t), \dot{\boldsymbol{q}}(\tilde{\boldsymbol{q}},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}},t)) \tag{6}$$

gegeben ist. (2 Punkte)