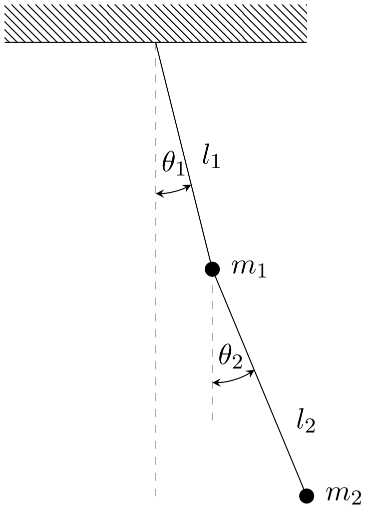
Aufgabe 19: Doppelpendel (5 Punkte)



(a) Formulieren Sie die Zwangsbedingungen für das ebene Doppelpendel und führen Sie die Winkel θ_1 und θ_2 als generalisierte Koordinaten ein. (1 Punkt)

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. (2 Punkte)

(c) Beschränken Sie sich auf kleine Schwingungen und lösen Sie die Gleichungen mit dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{1}$$

Diskutieren Sie die Lösung für die folgenden drei Fälle:

(i) $m_1 \ll m_2$,

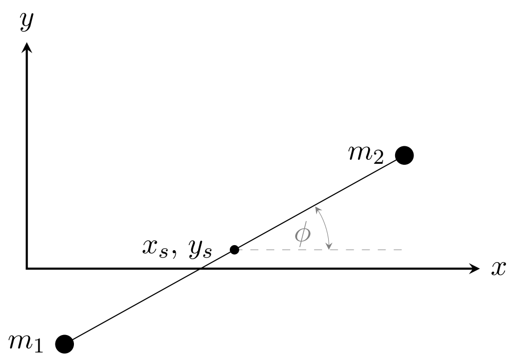
(ii) $m_1 \gg m_2$,

(iii) $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$

(2 Punkte)

Aufgabe 20: Hantel mit Reibungskraft (8 Punkte)

Zwei Punktmassen sind durch eine masselose Stange der Länge L starr zu einer Hantel verbunden udn können sich in der x-y-Ebene bewegen. Beide Massen unterliegen einer Reibungskraft, die proportional zu ihrer Geschwindigkeit ist.



(a) Führen Sie als verallgemeinerte Koordinaten q_k die Schwerpunktkoordinaten x_s, y_s der Hantel und den Winkel ϕ zwischen der Hantel und der x-Achse. (2 Punkte)

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie die verallgemeinerten Reibungskräfte Q_k. (2 Punkte)

(d) Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen an. (2 Punkte)

Aufgabe 21: Infinitesimale und endliche Drehungen (7 Punkte)
Für Infinitesimale Drehungen um die kartesischen Koordinatenachsen sind folgende Erzeugende gegeben:

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(a) Beweisen Sie die Kommutatorrelation

$$[J_i,J_j] \equiv J_i J_j - J_j J_i = \sum_{k=x,y,z} \varepsilon_{ijk} J_k \quad \text{mit} \quad (x,y,z) = (1,2,3). \tag{3}$$

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie J_i^{2n} und J_i^{2n+1} und leiten Sie unter Verwendung der Reihendarstellung der Exponentialfunktion die elementaren Drehmatrizen $R(\alpha e_x) = \mathrm{e}^{\alpha J_x}$, $R(\beta e_y) = \mathrm{e}^{\alpha J_y}$ und $R(\gamma e_z) = \mathrm{e}^{\alpha J_z}$ her. (2 Punkte)

Schreiben Sie nun mit dem Wissen aus (b) die Rotationsmatrix für

(c) eine 90° Drehung um die z-Achse und dann eine 90° Drehung um die ursprüngliche y-Achse. (1 Punkt)

(d) eine Drehung, so dass der Vektor $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ parallel zur neuen z-Achse ist. Beachten Sie, dass diese Beziehung nicht eindeutig die Rotationsmatrix spezifiziert. (2 Punkte)