Klassische Mechanik (SS 2018) – Blatt 8

Aufgabe 22: Tischplatte (9 Punkte)
Eine Masse m rotiere reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen Faden der Länge $l = r + s$ sei durch ein Loch in der Platte m mit einer anderen Masse M verbunden. Wie bewegt sich M unter Einfluss der Schwerkraft? Das Problem ist in Abbildung 1 skizziert.

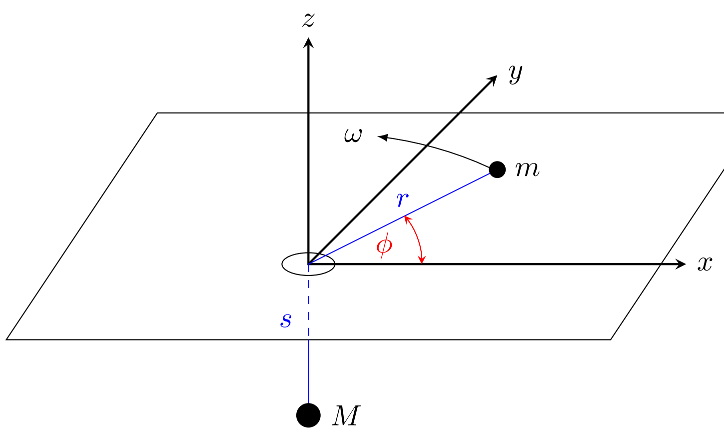

Abbildung 1: Skizze.

(a) Fomulieren und klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen. (2 Punkte)

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion und ihre Bewegungsgleichungen auf. (4 Punkte)

(c) Unter welchen Bedingungen rutscht die Masse M nach oben, wann nach unten? (2 Punkte)

(d) Was passiert für $\omega = 0$? (1 Punkt)

Aufgabe 23: Reine Galileitransformation (5 Punkte)
Der freie Fall im homogenen Schwerkraftfeld hat die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die reine Galileitransformation

$$x \to x' = x + \alpha t \tag{2}$$

eine Symmetrietransformation ist und berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Geben Sie die transformierte Lagrangefunktion $\mathcal{L}'(x', \dot{x}')$ an.

(ii) Erinnern Sie sich an die Eichinvarianz der Lagrangefunktion aus Aufgabe 18 (a) und finden Sie die Funktion $f(x',t)$. Warum reicht dies als Beweis für die Symmetrietransformation?

(iii) Nutzen Sie zur Berechnung der Erhaltungsgröße das Noether-Theorem aus.

Hinweis: Falls das Noether-Theorem in der Vorlesung noch nicht behandelt wurde, finden Sie es in den gängigen Lehrbüchern (z.B. F.Kuypers Klassische Mechanik).

Aufgabe 24: Erhaltungsgrößen des sphärischen Oszillators (6 Punkte)
Die Lagrangefunktion des sphärischen Oszillators kann wie folgt dargestellt werden

$$\mathcal{L}(\{q\},\{\dot{q}\}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\dot{q}_i^2 - q_i^2\right). \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$q_i^* = q_i + \frac{\gamma}{2}\left(\delta_{ik}\dot{q}_l + \delta_{il}\dot{q}_k\right), \quad t^* = t, \tag{4}$$

wobei $i,j,k \in \{1,2,3\}$, die Variation der Wirkung (und damit die Bewegungsgleichungen) invariant lassen. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die 9 zugehörigen Erhaltungsgrößen Q_{kl}. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass dies die Energie- und Drehimpulserhaltung impliziert. (2 Punkte)
Hinweis zum Drehimpuls: Zeigen Sie, dass

$$\ell_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3}\varepsilon_{ijk}^2\left(Q_{kk}Q_{ll} - Q_{kl}^2\right)$$

für die Drehimpulskomponente ℓ_i gilt. Hierbei ist ε_{ijk} das Levi-Cività-Symbol.