Klassische Mechanik (SS 2018) – Blatt 9

Aufgabe 25: Hamiltonfunktion und Energie (7 Punkte)
Wir betrachten eine Punktmasse m, welche auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der x-y-Ebene rotierenden Draht reibungslos gleitet. Es ist $\phi = \omega t$. Der Abstand der Masse zum Ursprung sei $q(t)$. Es wirke sonst keine weitere Kraft auf die Masse.

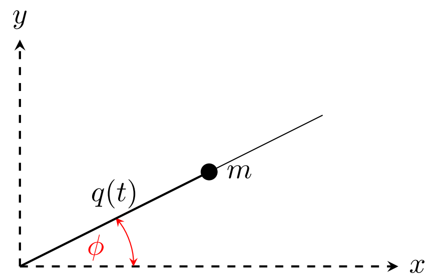

Abbildung 1: Skizze.

(a) Fomulieren Sie die Zwangsbedingungen und geben Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ an. Stellen Sie die zugehörige Bewegungsgleichung auf und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen $q(t=0) = q_0$ und $\dot{q}(t=0) = 0$. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Lösung aus (a) einen expliziten Ausdruck für die Gesamtenergie E des Systems. Skizzieren Sie E als Funktion der Zeit. Ist E erhalten? (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(q,\dot{q})$ aus $\mathcal{L}(q,\dot{q})$. Vergleichen Sie $\mathcal{H}$ mit der Gesamtenergie E aus (b) und interpretieren Sie das Ergebnis. (2 Punkte)

Aufgabe 26: Teilchen im elektromagnetischen Feld (4 Punkte)
Die Bewegung eines nichtrelativistischen Punktteilchens der Masse m und Ladung q im elektromagnetischen Feld ist durch die Lagrangefunktion

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \Phi, \boldsymbol{A}) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\left(\Phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right) \quad \text{(Gauß-Einheiten)} \tag{1}$$

gegeben. Dabei ist $\Phi(\boldsymbol{r},t)$ das skalare Potential und $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes. Leiten Sie die zugehörige Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \Phi, \boldsymbol{A})$ her und drücken diese als Funktion des kinematischen Impulses $\boldsymbol{p}_{\text{kin}} = \boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}$ aus. Hierbei ist $p_i = \partial L/\partial r_i$ der kanonische Impuls. Begründen Sie, ob die Hamiltonfunktion der Gesamtenergie E entspricht.

Aufgabe 27: Larmor-Theorem (9 Punkte)

Wir betrachten ein Punktteilchen der Masse m und Ladung q, welches sich im Zentralpotential $V = V(\bar{r})$ bewegt. Zusätzlich wird die Bewegung des Teilchens durch ein homogenes Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ beeinflusst. Als Bezugssystem wählen wir zunächst ein Inertialsystem $\bar{S}$, dessen $\bar{z}$-Achse in Richtung des Magnetfeldes zeigt. Es gilt also $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_{\bar{z}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{r}}) = \frac{B}{2}(-\bar{y}, \bar{x}, 0)^T$ ein Vektorpotential des Magnetfeldes $\boldsymbol{B}$ ist und geben Sie Lagrange- und Hamiltonfunktion für die Bewegung des Teilchens an. (2 Punkte)

(b) Wechseln Sie nun in ein mit konstanter Frequenz ω_L um die $\bar{z}$-Achse rotierendes Bezugssystem S und wählen Sie ω_L so, dass die Lagrangefunktion im rotierenden System die Form

$$L'(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \left(V(r) + \frac{m\omega_L^2}{2}(x^2 + y^2)\right) \tag{2}$$

annimmt. Geben Sie weiterhin die Hamiltonfunktion im rotierenden System an. (3 Punkte)

Das Ergebnis der letzten Teilaufgabe zeigt, dass es durch Wechsel des Bezugssystems möglich ist, den Effekt eines konstanten, homogenen Magnetfeldes auf Kosten eines zusätzlichen, harmonischen Potentialbeitrags aus der Lagrange- bzw. Hamiltonfunktion zu eliminieren. Dieser Zusammenhang wird als Larmor-Theorem bezeichnet. Die Frequenz ω_L heißt Larmor-Frequenz.
Für die Bewegung im reinen Zentralpotential stellt die $\bar{z}$-Komponente des Drehimpulses $L_{\bar{z}} = (\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{p}})_{\bar{z}}$ bekanntlich eine Erhaltungsgröße dar.

(c) Zeigen Sie, dass die zusätzliche Wechselwirkung mit dem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ im Allgemeinen zu $\dot{L}_{\bar{z}} \neq 0$ führt. Identifizieren Sie anschließend mit Hilfe des Larmor-Theorems eine neue Erhaltungsgröße $\tilde{L}_{\bar{z}}$, die für $B \to 0$ in $L_{\bar{z}}$ übergeht. Stellen Sie $\tilde{L}_{\bar{z}}$ im Inertialsystem dar. (2 Punkte)

(d) Wir können die Erhaltungsgröße $\tilde{L}_{\bar{z}}$ auch mit Hilfe des Noether-Theorems finden. Nutzen Sie dazu aus, dass die Lagrangefunktion $L(\bar{\boldsymbol{r}}, \dot{\bar{\boldsymbol{r}}})$ invariant unter der Transformation

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}' + \alpha(\boldsymbol{e}_{\bar{z}'} \times \bar{\boldsymbol{r}}') \tag{3}$$

ist (muss nicht gezeigt werden) und bestimmen Sie $\tilde{L}_{\bar{z}}$ durch

$$\tilde{L}_{\bar{z}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}_i} \frac{\mathrm{d}\bar{r}_i}{\mathrm{d}\alpha}\Big|_{\alpha=0}. \tag{4}$$