Fortgeschrittene Vielteilchentheorie (WS 2018/2019) – Blatt 4

◯ Aufgabe 9: Heisenbergsche Spinkette

Wir betrachten zunächst zwei wechselwirkende Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen auf den Plätzen 1 und 2. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$H = J\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2, \tag{1}$$

wobei J eine Kopplungskonstante ist.

(a) Wir betrachten zunächst den Hamiltonoperator in der Basis der $\boldsymbol{S}_i$, S_i^z mit $|S_1,m_1\rangle \otimes |S_2,m_2\rangle = |S_1,S_2,m_1,m_2\rangle$. Stellen Sie die zugehörige Basis auf und den Hamiltonoperator in dieser Basis in Matrixform dar.
Tipp: Schreiben Sie den Hamiltonoperator mit Hilfe der Leiteroperatoren $S_i^\pm$ um.
Berechnen Sie nun Eigenwerte und Eigenvektoren. Zeichnen Sie die Levelstruktur für $J < 0$ und $J > 0$. Identifizieren Sie dabei Singlet- und Triplet-Zustände.

(b) Nun wenden wir den Formalismus der Drehimpulsalgebra an, um eine Basis zu finden, in der der Hamiltonoperator bereits diagonal ist. Führen Sie den Gesamtspin $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ ein. Da $\boldsymbol{S}^2$, $\boldsymbol{S}_i^2$ und S_z wechselseitig kommutieren, lässt sich eine gemeinsame Basis $\{|S_1,S_2,S,M_S\rangle\}$ finden. Geben Sie diese Basis an.
Die Transformation zwischen den beiden Basen wird durch

$$|S_1,S_2,S,M_S\rangle = \sum_{m_1,m_2} c(m_1,m_2,S,M_S)\,|S_1,S_2,m_1,m_2\rangle \tag{2}$$

vermittelt, wobei $c(m_1,m_2,S,M_S)$ die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind. Finden Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, indem Sie

- zeigen, dass S_z bereits in der alten Basis diagonal ist. Daraus können Sie Rückschlüsse auf den Zustand mit dem höchsten Gewicht, d.h. jenen Zustand zu $S = S_1 + S_2 = 1$ und $M_S = 1$ ziehen.
- Analog ergibt sich der Zustand mit $S = S_1 + S_2 = 1$ und $M_S = -1$.
- Durch Anwenden der Leiteroperatoren, sowie durch Ausnutzung von Orthogonalität und Normierung der Zustände können die restlichen Zustände gefunden werden.

Überzeugen Sie sich, dass die Basistransformation genau den Zuständen entspricht, die Sie in (a) gefunden haben.

(c) Wir betrachten nun noch einmal den Hamiltonoperator (1). Stellen Sie diesen nun in der Basis des Gesamtspins $\boldsymbol{S}$ dar. Geben Sie auch hier Eigenwerte und Eigenvektoren an. Was fällt auf?

Wir wollen das Konzept der Drehimpulsalgebra nun auf ein System von drei Spins erweitern. Hierzu koppelt man zuerst zwei der Spins zu einem Gesamtspin $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, wie wir dies bereits getan haben. Nun können wir den neuen Spin $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{S}_3$ zu einem Gesamtspin $\tilde{\boldsymbol{S}}$ koppeln.

(d) Stellen Sie zunächst die Basis $\mathcal{B}_1$ der ungekoppelten Spins $\{|S_1m_1\rangle \otimes |S_2m_2\rangle \otimes |S_3m_3\rangle\}$ auf. Geben Sie nun mit dem Wissen aus (b) die Basis $\mathcal{B}_2 = \{|S_1S_2SM_S\rangle \otimes |S_3m_3\rangle\}$ an. Schließlich benötigen wir noch die Basis $\mathcal{B}_3 = \{|SS_3\tilde{S}M_{\tilde{S}}\rangle\}$. Beachten Sie hierbei, dass $S = 0$ und $S = 1$ sein kann. Die Zahl der Basiszustände muss für alle Basen gleich sein!
Die Basistransformation von $\mathcal{B}_1$ zu $\mathcal{B}_2$ haben wir in (b) bereits durchgeführt. Schlagen Sie nun die Clebsch-Gordan-Koeffizienten nach, die Sie für die Transformation von $\mathcal{B}_2$ zu $\mathcal{B}_3$ benötigen. Anschließend können Sie die Transformation zwischen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_3$ aufstellen.

(e) Wir erweitern die Spinkette um einen weiteren Spin und erhalten

$$H^{\text{Kette}} = J(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3) \tag{3}$$

eine Spinkette mit offenen Randbedingungen, d.h. Spin 1 wechselwirkt nicht mit Spin 3. Durch unsere Vorarbeit in (d) können wir nun sehr einfach die Eigenzustände und Eigenwerte des Hamiltonoperators berechnen. Schreiben Sie dazu den Hamiltonoperator mit Hilfe von $\tilde{\boldsymbol{S}}^2$, $\boldsymbol{S}^2$ und $\boldsymbol{S}_2^2$ um.
Tipp: Rein formal müssen wir nun $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_3$ definieren, da sich nur dann ein schönes Ergebnis ergibt.
Zeichen Sie die Levelstruktur für $J \lessgtr 0$. Diskutieren Sie die Entartungsgrade der jeweiligen Grundzustände.

Aufgabe 10: Landau-Niveaus (10 Punkte)
Wir betrachten ein geladenes Teilchen der Masse m mit Ladung q im elektromagnetischen Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0$ und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = B\boldsymbol{e}_3$. Der Hamiltonoperator des Problems lautet im Allgemeinen

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t))^2 + q\phi(\boldsymbol{r},t). \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie, dass die elektromagnetischen Potentiale in Landau-Eichung

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = -Bx_2\boldsymbol{e}_1, \quad \phi(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{5}$$

die elektromagnetischen Felder erzeugen. (1 Punkt)

(b) Stellen Sie den Hamiltonoperator mit den Potentialen aus (5) auf. Mit welchen Komponenten des Impulsoperators $\boldsymbol{p}$ kommutiert der Hamiltonoperator? Geben Sie die Schrödingergleichung in Ortsdarstellung an. (2 Punkt)

(c) Zur Lösung des Problems wählen wir den Ansatz

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi\hbar}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_1p_1+x_3p_3)/\hbar}h(x_2). \tag{6}$$

Begründen Sie, warum dies ein sinnvoller Ansatz ist. Setzen Sie (6) in die Schrödingergleichung ein und zeigen Sie, dass

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_2^2} + \frac{m\omega_c^2}{2}\left(x_2 + \frac{p_1}{qB}\right)^2\right]h(x_2) = \left(E - \frac{p_3^2}{2m}\right)h(x_2). \tag{7}$$

Hierbei ist $\omega_c = |qB|/m$ die Zyklotronfrequenz. (3 Punkte)

(d) Bestimmen Sie $h(x_2)$, indem Sie (7) mit bereits bekannten Ergebnissen vergleichen. Geben Sie dann $\varphi(\boldsymbol{r})$ und die Energieeigenwerte an.
Interpretieren Sie das Ergebnis: Wo treten Quantisierungen auf? Wo finden sich die Landau-Niveaus? Wie treten die drei Raumrichtungen in der Lösung auf? Wie passt dies zu den elektromagnetischen Feldern? (4 Punkte)