Fortgeschrittene Vielteilchentheorie (WS 2018/2019) – Blatt 7

◯ Aufgabe 17: Adiabatische Entwicklung eines Spin-1/2-Systems

Gegeben sei ein Elektron in einem zeitabhängigen Magnetfeld konstanter Stärke B_0 und zeitabhängiger Richtung

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0 \left(\sin\theta\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z\right). \tag{1}$$

Wir vernachlässigen den kinetischen Beitrag des Elektrons und betrachten nur den Hamiltonian

$$H(t) = -\frac{e}{mc}\boldsymbol{B}(t)\cdot\boldsymbol{S}, \tag{2}$$

wobei $\boldsymbol{S}$ der Spinoperator für Spin-1/2-Teilchen ist. Der Zustand des Elektrons wird durch einen zweikomponentigen Spinor

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}\psi_\uparrow(t)\\ \psi_\downarrow(t)\end{pmatrix} \tag{3}$$

beschrieben, wobei die Spins entlang der z-Achse quantisiert sind.

(a) Schreiben Sie den Hamiltonian als 2×2-Matrix, welche auf den zweikomponentigen Spinor wirkt.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände des Operators

$$H(t)\,|\chi_\pm(t)\rangle = E_\pm\,|\chi_\pm(t)\rangle\,. \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Eigenzustände so, dass sie die gleiche Periodizität wie $H(t)$ aufweisen, dh $\chi_\pm(t) = \chi_\pm(t+\tau)$ mit $\tau = 2\pi/\omega$.

(c) Das Elektron befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\psi(0)\rangle = |\chi_-(0)\rangle$. Wenn die Frequenz ω klein genug ist, ist die Zeitentwicklung des Spinors $|\psi(t)\rangle$ adiabatisch. Nutzen Sie das adiabatische Theorem um die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi(t)\rangle$ anzugeben. Geben Sie die dynamische und die geometrische Phase (Berry-Phase) explizit an.

(d) Finden Sie die exakte Lösung der Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle \tag{5}$$

mit $|\psi(0)\rangle = |\chi_-(0)\rangle$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit (c). Unter welcher Bedingung ist die Anwendung des adiabatischen Theorems gerechtfertigt?

Fortgeschrittene Vielteilchentheorie (WS 2018/2019) – Blatt 7

◯ Aufgabe 18: Rabi-Oszillationen im Heisenbergbild

Der Hamiltonoperator eines Zwei-Niveau-Systems ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2} \left(|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +| \right). \tag{6}$$

Folgende Operatoren sind im Schrödingerbild definiert

$$\hat{\sigma}_+ = |+\rangle \langle -| , \quad \hat{\sigma}_- = |-\rangle \langle +| , \quad \hat{\sigma}_z = |+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -| . \tag{7}$$

(a) Berechnen Sie die Kommutatoren von $\hat{\sigma}_{\pm,z}$ untereinander, sowie mit $\hat{H}$.

(b) Geben Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für $\hat{\sigma}_{\pm,z}(t)$ an und lösen Sie diese.
Zwischenergebnis: $\hat{\sigma}_z(t) = \mathrm{i}(\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+) \sin(\Omega t) + \hat{\sigma}_z \cos(\Omega t)$.

(c) Der Zustandsvektor im Heisenbergbild sei $|\psi_\mathrm{H}\rangle = |+\rangle$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System im Zustand $|\pm\rangle$ zur Zeit t zu finden. Rechnen Sie im Heisenbergbild! Plotten Sie die Wahrscheinlichkeiten über Ωt. Was fällt auf?
Hinweis: Drücken Sie $|\pm\rangle \langle \pm|$ *durch* $\hat{\sigma}_{\pm,z}$ *aus.*

◯ Aufgabe 19: Geladener harmonischer Oszillator mit linearer Störung

Ein eindimensionaler geladener harmonischer Oszillator besitzt die Ladung q, Masse m und Kreisfrequenz ω. Zur Zeit $t_0 = -\infty$ befinde er sich in seinem Grundzustand.

(a) Wie lautet der Hamiltonian, wenn der harmonische Oszillator dem homogenen elektrischen Feld

$$E(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}\tau_0} \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right), \tag{8}$$

ausgesetzt ist? Nehmen Sie eine Dipolwechselwirkung an. Hierbei ist $A, \tau_0 \in \mathbb{R}^+$.

(b) Berechnen Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Oszillator zur Zeit $t = +\infty$ in seinem n-ten Energiezustand anzutreffen.

(c) Unter welcher Voraussetzung bzgl. der Größen A und τ_0 ist die Beschränkung auf erste Ordnung Störungstheorie möglich?

Hinweis: Verwenden Sie die Relation

$$\int_\mathbb{R} \mathrm{d}x e^{-c(x-d)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}, \qquad c \in \mathbb{R}^+, d \in \mathbb{C}. \tag{9}$$