**Fortgeschrittene Vielteilchentheorie** (WS 2018/2019) – Blatt 8

---

**Aufgabe 20: Aharonov-Bohm-Effekt (10 Punkte)**
Wir betrachten ein Teilchen der Masse $m$, das sich auf einem ebenen Kreis mit Radius $a$ bewegt. Der Hamiltonianoperator in Zylinderkoordinaten sei durch

$$H_0 = \frac{\boldsymbol{p}_0^2}{2m} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\hbar\partial}{\mathrm{i}a\partial\phi} \tag{1}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Energieeigenfunktionen und -eigenwerte mit periodischen Randbedingungen. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Wellenfunktionen und Energieniveaus für das Teilchen in Anwesenheit eines Vektorpotentials

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\phi \begin{cases} \frac{B}{2}r & \text{für } r \leq r_0, \\ \frac{Br_0^2}{2r} & \text{für } r \geq r_0, \end{cases} \tag{2}$$

wobei $r_0 < a$ ist. (2 Punkte)

(c) Betrachten Sie nun das Vektorpotential

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi \quad \text{mit} \quad \chi = -\frac{Br_0^2}{2}\phi. \tag{3}$$

Berechnen Sie das Vektorpotential $\boldsymbol{A}'$ und das zugehörige Magnetfeld $\boldsymbol{B}'$. Stellt die Transformation $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ eine Eichtransformation dar? (2 Punkte)

(d) Finden Sie die Wellenfunktionen und Energieniveaus für $\boldsymbol{A}'$. (2 Punkte)

(e) Vergleichen Sie die Resultate von (b) und (d) und begründen Sie, warum durch die Transformation $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ der Aharonov-Bohm-Effekt nicht widerlegt ist. (2 Punkte)

○ **Aufgabe 21: Zur Streutheorie**

(a) Leiten Sie die Greensche Funktion eines freien Teilchens in 1D her.

(b) Leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für ein kugelsymmetrisches Streupotential $V(\boldsymbol{r}) = V(r)$ in erster Born-Näherung her.

(c) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt in erster Born-Näherung für das Yukawa-Potential

$$V(r) = V_0 \frac{\mathrm{e}^{-r/R}}{r}. \tag{4}$$

(d) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt des Yukawa-Potentials.

(e) Finden Sie die Relation zwischen $V_0$ und $R$, für die die Born-Näherung gültig wird.

(f) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt in erster Born-Näherung für das Coulomb-Potential

$$V(r) = \frac{V_0}{r}. \tag{5}$$

Da das Integral nicht konvergiert, müssen Sie Ihr Wissen aus (c) nutzen.