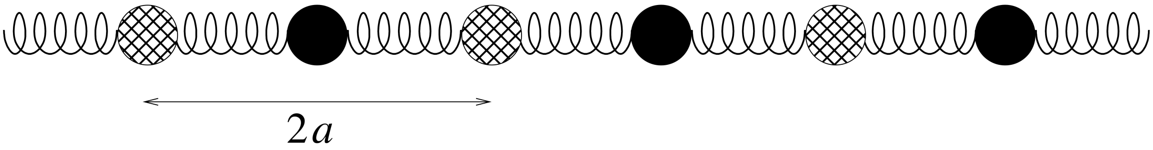
Fortgeschrittene Vielteilchentheorie (WS 2018/2019) – Blatt 9

◯ Aufgabe 21: Dispersionsrelation von Phononen im Festkörper

Wir betrachten eine lineare Kette mit einer Basis aus zwei Atomen der Massen m und M. Alle Federkonstanten seien identisch gleich κ. Die Gitterkonstante sei a. Wir nehmen periodische Randbedingungen an.



(a) Wir bezeichnen die Auslenkungen der Massen aus der Ruhelage als q_j und Q_j. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion des Systems

$$L = \sum_n \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_n^2 + \frac{1}{2} M \dot{Q}_n^2 - \frac{1}{2}\kappa (Q_n - q_n)^2 - \frac{1}{2}\kappa (q_{n+1} - Q_n)^2 \right) \tag{1}$$

lautet. Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für $\ddot{q}_n$ und $\ddot{Q}_n$ ab.

(b) Zum Lösen der Bewegungsgleichungen verwenden wir den Ansatz

$$q_n = \tilde{q} e^{ik2na - i\omega(k)t}, \quad Q_n = \tilde{Q} e^{ik(2n+1)a - i\omega(k)t}. \tag{2}$$

Leiten Sie die Bedingung

$$\boldsymbol{M}(\omega, \kappa, k, M, m, a) \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{Q} \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

her, wobei $\boldsymbol{M}$ eine 2×2 Matrix bezeichnet.

(c) Welche Bedingung muss $\boldsymbol{M}$ erfüllen, damit das System nicht nur die triviale Lösung besitzt? Achten Sie auf die Randbedingungen!

(d) Plotten Sie die Verläufe der Lösungen $\omega_\pm(k)$ für drei unterschiedliche Verhältnisse m/M. Identifizieren Sie den akustischen und den optischen Zweig.

(e) Was ergibt sich im Fall einer einfachen linearen Kette mit $m = M$? Was passiert im Grenzfall $M \gg m$? Interpretieren Sie diese Ergebnisse. Welche physikalischen Systeme liegen diesen Fällen zugrunde?

◯ Aufgabe 22: Bellsche Ungleichung mit Photonen

Wir betrachten zwei Photonen, die in entgegengesetzte Richtungen propagieren. Eines (1) entlang z, das andere (2) entlang $-z$. Die beiden befinden sich in einem polarisierten verschränkten Zustand:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2 - |y\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|xy\rangle - |yx\rangle \right). \tag{4}$$

Die Zustände $|x\rangle$ und $|y\rangle$ sind Zustände linearer Polarisation in x- und y-Richtung.

(a) Sei

$$|\theta\rangle = \cos\theta\, |x\rangle + \sin\theta\, |y\rangle, \quad |\theta_\perp\rangle = -\sin\theta\, |x\rangle + \cos\theta\, |y\rangle \tag{5}$$

der Zustand linearer Polarisation in Richtung $\hat{\boldsymbol{n}}_\theta$ in der x-y-Ebene und $|\theta_\perp\rangle$ sei der dazu orthogonale Zustand. Zeigen Sie, dass

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\theta\theta_\perp\rangle - |\theta_\perp\theta\rangle \right). \tag{6}$$

Der Zustand $|\Phi\rangle$ ist nun invariant unter Rotation um die z-Achse.

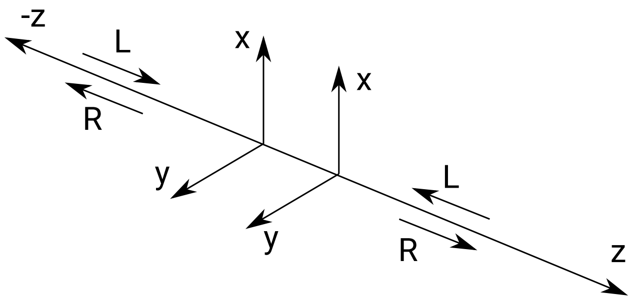


Abbildung 1: Konfiguration der Polarisationen der verschränkten Photonen

(b) Schreiben Sie $|\Phi\rangle$ nun als Funktion der zirkular polarisierten Zustände

$$|R\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle + \mathrm{i}\,|y\rangle\right), \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle - \mathrm{i}\,|y\rangle\right). \tag{7}$$

Achten Sie dabei auf die Orientierung der Achsen. Die Drehrichtung hängt von der Ausbreitungsrichtung ab:

$$|\Phi\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(|RR\rangle - |LL\rangle\right). \tag{8}$$

Zeigen Sie, dass $|\Phi\rangle$ nun invariant unter Rotationen um die z-Achse ist.

(c) Alice und Bob stellen lineare Polarisatoren auf, um die Polarisation der Photonen zu analysieren. Dabei zeigt der Polarisator für Teilchen 1 in Richtung $\hat{\boldsymbol{n}}_\alpha$ und der für Teilchen 2 in Richtung $\hat{\boldsymbol{n}}_\beta$ in der x-y-Ebene. Wir definieren

- $p_{++}(\alpha,\beta)$ als die Wahrscheinlichkeit, dass das Photon 1 in $\hat{\boldsymbol{n}}_\alpha$-Richtung polarisiert ist und Photon 2 in $\hat{\boldsymbol{n}}_\beta$-Richtung.
- $p_{+-}(\alpha,\beta)$ als die Wahrscheinlichkeit, dass das Photon 1 in $\hat{\boldsymbol{n}}_\alpha$-Richtung polarisiert ist und Photon 2 in $\hat{\boldsymbol{n}}_{\beta_\perp}$-Richtung.

Die Wahrscheinlichkeiten $p_{-+}(\alpha,\beta)$ und $p_{--}(\alpha,\beta)$ sind analog definiert. Weiter sei der Erwartungswert

$$E(\alpha,\beta) = p_{++}(\alpha,\beta) + p_{--}(\alpha,\beta) - p_{+-}(\alpha,\beta) - p_{-+}(\alpha,\beta). \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass

$$E(\alpha,\beta) = -\cos\left(2(\alpha-\beta)\right). \tag{10}$$

Nutzen Sie die Rotationsinvarianz von $|\Phi\rangle$ aus. Welche Werte von α, α', β und β' werden benötigt, um die Relation

$$X = E(\alpha,\beta) + E(\alpha,\beta') + E(\alpha',\beta') - E(\alpha',\beta) = -2\sqrt{2} \tag{11}$$

zu erhalten?