Fortgeschrittene Vielteilchentheorie (WS 2018/2019) – Blatt 1

Wichtige Hinweise zu den Übungsblättern:
Die Übungsblätter sind in **schriftliche** und **mündliche** Probleme gegliedert.
Die **schriftlichen** Probleme müssen bis zum Übungsgruppentermin gelöst werden und dem jeweiligem Tutor spätestens zu Beginn der Übungsgruppe ausgehändigt werden. Der Tutor wird diese schriftlichen Aufgaben korrigieren und bepunktet wieder zurückgeben.
Die **mündlichen** Probleme müssen zum Übungstermin vorbereitet werden und werden in der Übungsgruppe besprochen. Um Punkte für diese Aufgaben zu erhalten, wird der Tutor zu Beginn der Übungsgruppe eine Liste ausgeben, in der sich die Studierenden, die das Problem an der Tafel vorstellen können, eintragen. Die Aufgaben, die mündlich präsentiert werden sollen, sind mit einem ◯ markiert.
Um zu der abschließenden Klausur zugelassen zu werden, müssen **80% der schriftlichen Punkte** und **66 % der mündlichen Punkte** erreicht worden sein. Des Weiteren muss jeder Studierende **zwei mal an der Tafel** vorgerechnet haben.

◯ Aufgabe 1: Operator Algebra

(a) Zeigen Sie, dass für die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ mit der Konstanten $c \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(c\hat{A})^\dagger = c^* \hat{A}^\dagger, \tag{1}$$
$$(\hat{A} + \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger, \tag{2}$$
$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger, \tag{3}$$
$$(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}. \tag{4}$$

(b) Beweisen Sie folgende Kommutatorrelationen:

$$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}, \tag{5}$$
$$[\hat{A},\hat{B}]^\dagger = [\hat{B}^\dagger, \hat{A}^\dagger], \tag{6}$$
$$[[\hat{A},\hat{B}],\hat{C}] + [[\hat{B},\hat{C}],\hat{A}] + [[\hat{C},\hat{A}],\hat{B}] = 0. \tag{7}$$

(c) Das Exponential eines Operators ist definiert über seine Reihenentwicklung:

$$e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n. \tag{8}$$

Benutzen Sie diese Definition, oder vice versa, um

$$\hat{S}(a) = e^{a\hat{A}}, \qquad \text{mit } \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

als 2×2-Matrix darzustellen.

◯ Aufgabe 2: Übungen zu den quantenmechanischen Postulaten

Gegeben sei ein System mit einem dreidimensionalen Zustandsraum, der von der orthonormalen Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ aufgespannt wird. In dieser Basis sind der Hamiltonian $\hat{H}$ des Systems und zwei Observable $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gegeben

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

wobei ω, a und b positive reelle Konstanten sind. Das System zum Zeitpunkt $t = 0$ wird durch den Zustand

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle \tag{11}$$

beschrieben.

(a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Energie des Systems gemessen. Welche Werte können gemessen werden und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten diese auf? Berechnen Sie den Mittelwert $\langle \hat{H} \rangle$ und die Varianz $\Delta \hat{H}$.

(b) Anstatt $\hat{H}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ zu messen, messen wir nun $\hat{A}$. Welche Werte werden mit welcher Wahrscheinlichkeit gemessen? Wie lautet sich der Zustandsvektor direkt nach der Messung?

(c) Berechnen Sie den Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ des Systems zur Zeit t.

(d) Berechnen Sie $\langle \hat{A} \rangle(t)$ und $\langle \hat{B} \rangle(t)$. Was kann gefolgert werden?

(e) Welches Ergebnis erhält man, wenn man die Observable $\hat{A}$ zum Zeitpunkt t misst? Was passiert für die Messung von $\hat{B}$?

◯ Aufgabe 3: Heisenbergsche Unschärferelation

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei hermitesche nicht kommutierende Operatoren. Die Varianz eines Operators ist definiert als

$$\Delta A = \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle}, \tag{12}$$

wobei $\langle \dots \rangle$ der Erwartungswert in einem beliebigem Zustand ist. Es gilt die folgende Ungleichung

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2. \tag{13}$$

Dies ist die allgemeine Formulierung der Heisenbergschen Unschärferelation.

(a) Zeigen Sie, dass für die Impuls- und Ortsoperatoren die Unschärferelation gegeben ist durch

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{14}$$

(b) Beweisen Sie die Schwarzsche Ungleichung

$$\left| \langle \psi | \phi \rangle \right|^2 \leq \langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle. \tag{15}$$

Hinweis: Zerlegen Sie den Zustand $|\psi\rangle$ in eine senkrechte und eine parallele Komponente in Bezug auf $|\phi\rangle$.

(c) Leiten Sie nun die Gleichung (13) wie folgt her

(i) Definieren Sie die Operatoren $\hat{A}' = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$ und $\hat{B}' = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$ und wenden Sie die Schwarzsche Ungleichung auf das Produkt $\hat{A}'\hat{B}'$ an.

(ii) Das Produkt von zwei Operatoren kann wie folgt dargestellt werden:

$$\hat{A}\hat{B} = \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2}\{\hat{A}, \hat{B}\}, \tag{16}$$

wobei $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ dem Antikommutator entspricht. Ist der Antikommutator hermitesch oder antihermitesch? Was folgt für den Erwartungswert eines hermiteschen bzw. antihermiteschen Operators?