Fortgeschrittene Vielteilchentheorie (WS 2018/2019) – Blatt 2

◯ Aufgabe 4: Rotationen und SU(2)

Die aus der klassischen Mechanik bekannte Gruppe der Drehmatrizen SO(3) lässt sich nur mit Einschränkungen in der Quantenmechanik nutzen, da beispielsweise die Forderung der Stetigkeit der Kugelflächenfunktionen unter Drehungen um 2π für halbzahlige Drehimpulse nicht mehr erfüllt ist. Als Ausweg betrachten wir nun die Gruppe der unitären 2x2-Matrizen SU(2).

Die spezielle unitäre Gruppe SU(2) ist die Gruppe

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ U \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,|\, U^\dagger U = \mathbb{1}, \det U = 1 \right\}, \tag{1}$$

d.h. die Gruppe der unitären 2×2 Matrizen mit Determinante 1.

(a) Sei $U \in \mathrm{SU}(2)$. Zeigen Sie, dass U wie folgt aussieht

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{2}$$

(b) Zeigen Sie, dass in der Umgebung der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ gilt

$$U = \mathbb{1} - \mathrm{i}\tau, \quad \text{mit} \quad \tau = \tau^\dagger, \tag{3}$$

wobei τ eine Funktion der Paulimatrizen σ_i der Form

$$\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \theta_i \sigma_i, \quad \theta_i \to 0$$

ist.

(c) Sei $\theta = \left(\sum_i \theta_i^2\right)^{1/2}$ und $\theta_i = \theta \hat{n}_i$, wobei $\hat{n}_i$ ein Einheitsvektor ist. Nehmen Sie an, dass die θ_i endlich sind, sodass die folgende Definition gilt

$$U_{\hat{n}}(\theta) = \lim_{N\to\infty} \left[U_{\hat{n}} \left(\frac{\theta}{N} \right) \right]^N .$$

Zeigen Sie, dass

$$U_{\hat{n}}(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}/2}. \tag{4}$$

Wie man leicht sieht, ist die Matrix $-\theta/2\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ eine hermitesche 2x2-Matrix mit verschwindender Spur. Unser Resultat zeigt, dass jedes Element der SU(2) als Exponentialreihe einer solchen Matrix dargestellt werden kann. Die drei Paulimatrizen $\boldsymbol{\sigma}$ bilden eine Basis für den Raum der hermiteschen spurlosen Matrizen.

(d) Sei $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{V}$ eine hermitesche Matrix mit verschwindender Spur:

$$\mathcal{V} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Wie sieht die Determinante von $\mathcal{V}$ aus? Wir betrachten nun die Wirkung einer unitären Transformation $U \in$SU(2) auf die Matrix $\mathcal{V}$: die Matrix

$$\mathcal{W} = U\mathcal{V}U^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{W}$ in der Form $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{w}$ dargestellt werden kann und sich $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{v}$ dabei nur um eine Drehung unterscheiden.

(e) Sei $\boldsymbol{v}(\theta)$ wie folgt definiert

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}(\theta) = U_{\hat{n}}(\theta)[\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}]U_{\hat{n}}^{-1}(\theta), \quad \boldsymbol{v}(\theta = 0) = \boldsymbol{v}.$$

Zeigen Sie

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \hat{n} \times \boldsymbol{v}(\theta). \tag{5}$$

Lösen Sie die DGL (5), indem Sie das Kreuzprodukt mit $\hat{n}$ als schiefsymmetrische Matrix schreiben. Zeigen Sie dann, dass $\boldsymbol{v}(\theta)$ aus einer Drehung des Vektors $\boldsymbol{v}$ um den Winkel θ folgt. Stellen Sie anschließend die schiefsymmetrische Matrix mit den infinitesimalen Erzeugenden von SO(3) dar. Was fällt auf?

Das Ergebnis zeigt einen Zusammenhang zwischen den Rotationsmatrizen $\mathcal{R}_{\hat{n}}(\theta) \in \mathrm{SO}(3)$ und den Matrizen $U_{\hat{n}}(\theta) \in \mathrm{SU}(2)$ auf. Ist dies eine $1:1$ oder $2:1$ Abbildung?

Aufgabe 5: Gestörter Harmonischer Oszillator (10 Punkte)
Ein harmonischer Oszillator wird folgender Störung ausgesetzt

$$\hat{V}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar\omega\theta(t)(|2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|), \tag{6}$$

wobei $\theta(t)$ die Heaviside-Funktion ist. Der Oszillator sei im Zustand $|n = 2\rangle$ für $t \leq 0$ (ungestört). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsamplituden der Zustände des ungestörten Oszillators $|n\rangle$ mit den gestörten $|\psi(t)\rangle$ bei $t > 0$, d.h. $\langle n|\psi(t)\rangle$, auf zwei verschiedene Arten:

(a) indem Sie die Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsamplituden direkt lösen.
Tipp: Beachten Sie nur die Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ und stellen Sie $|\psi(t)\rangle$ als Überlagerung der beiden Zustände dar. (4 Punkte)

(b) indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Hamiltonians $\hat{H}_0 + \hat{V}$ (im Unterraum von $|1\rangle$ und $|2\rangle$) berechnen und den Zeitentwicklungsoperator anwenden.
(4 Punkte)

(c) Fertigen Sie eine Skizze der niedrigsten Energien des Systems für $t > 0$ und $t < 0$ an.
(2 Punkte)