Fortgeschrittene Vielteilchentheorie (WS 2018/2019) – Blatt 5

◯ Aufgabe 11: Variationsprinzip

Wir betrachten ein Teilchen in einem Potential mit

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{für } x > 0, \\ \infty & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die exakte Grundzustandsenergie $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ ist. Nutzen Sie dabei aus, dass die Wellefunktion bei $x = 0$ stetig sein muss. Welche Wellenfunktionen für $x > 0$ sind somit zulässig?

(b) Wir wählen nun den Variationsansatz

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ cx\mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Welche Energie liefert dieser Ansatz? Bewerten Sie diesen Ansatz.

(c) Berechnen Sie die Energie nun mit den Ansatz

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ cx\mathrm{e}^{-ax^2} & \text{für } x > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Nützliche Formeln:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x x^n \mathrm{e}^{-\gamma x} = \frac{\Gamma(n+1)}{\gamma^{n+1}} \tag{4}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x x^n \mathrm{e}^{-\gamma x^2} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{2\gamma^{(n+1)/2}} \tag{5}$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \tag{6}$$

◯ Aufgabe 12: Stationäre Störungstheorie

Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2, \tag{7}$$

(a) Auf den Hamiltonoperator (7) wirke die Störung $V(\hat{x}) = \beta\hat{x}^4$ mit $\beta > 0$. Wie lauten die Energiekorrekturen erster Ordnung? Nutzen Sie die Besetzungszahldarstellung.

(b) Zum Hamiltonoperator (7) komme nun die Störung $H_1 = \alpha\hat{x}^2$ hinzu. Berechnen Sie die Energiekorrektur und die Zustandskorrektur erster Ordnung.

(c) Wie sieht die Energiekorrektur in zweiter Ordnung für die Störung H_1 aus?

(d) Vergleichen Sie die Energiekorrekturen erster und zweiter Ordnung mit der exakten Energie.

◯ Aufgabe 13: Zweidimensionaler Harmonischer Oszillator

Wir betrachten einen zweidimensionalen, harmonischen Oszillator

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{8}$$

in dimensionslosen Einheiten ($\hbar = m = 1$). Der Oszillator werde durch die Störung

$$H_1 = \delta xy \tag{9}$$

gestört.

(a) Geben Sie für die drei niedrigsten Energien von H_0 die Wellenfunktionen der zugehörigen Zustände an.

(b) Berechnen Sie die Energiekorrekturen erster und zweiter Ordnung für den Grundzustand von H_0.

(c) Betrachten Sie nun die Energiekorrekturen zur ersten Anregungsenergie. Dazu benötigen wir die Störungstheorie entarteter Zustände. Stellen Sie die Störung H_1 in der Basis der entarteten Zustände zur ersten Anregungsenergie dar. Berechnen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte von H_1 in dieser Darstellung und drücken Sie diese als Linearkombinationen der Eigenzustände von H_0 aus.

(d) Wiederholen Sie das Vorgehen aus (c) für die zweite Anregungsenergie.

(e) Zeichnen Sie das Levelschema des Oszillators vor und nach der Störung.