Fortgeschrittene Vielteilchentheorie (WS 2018/2019) – Blatt 6

Aufgabe 14: Spinsystem mit Störung (10 Punkte)
Gegeben seien zwei Spin 1/2. Für die Zeit $t < 0$ hängt der Hamiltonoperator nicht von den Spins ab und kann daher als Null erachtet werden, wenn die Energieskala geschickt gewählt wird. Bei $t = 0$ werden die Spins gekoppelt und das System wird durch den Hamiltonoperator

$$H = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right) \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{S}_2 \tag{1}$$

beschrieben. Zur Zeit $t < 0$ sei das System im Zustand $|\uparrow\downarrow\rangle$. Dies ist der Eigenzustand zu S_{1z} und S_{2z} mit den Eigenwerten $+\hbar/2$ und $-\hbar/2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit abhängig von der Zeit einen der Zustände $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ zu finden:

(a) Ohne eine Näherung zu machen, also exakt. Nutzen Sie das Wissen aus vergangenen Aufgaben. (5 Punkte)

(b) Mit der zeitabhängigen Störungstheorie in erster Ordnung. Betrachten Sie dabei H als Störung für $t > 0$. Diskutieren Sie anhand von (a) die Gültigkeit dieser Näherung. (5 Punkte)

Aufgabe 15: Harmonischer Oszillator mit Störung (10 Bonuspunkte)
Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Masse m und Frequenz ω_0. Die Eigenzustände zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$ seien durch $|\phi_n\rangle$ beschrieben. Für $t < 0$ befinde sich der Oszillator im Grundzustand $|\phi_0\rangle$. Bei $t = 0$ wird eine Störung der Dauer τ eingeschaltet. Diese ist durch

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} \lambda\alpha(b^\dagger + b) & \text{für } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > \tau \end{cases} \tag{2}$$

gegeben. Hierbei sind $\lambda \ll 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ die Störamplitude und $b^\dagger$, b die Leiteroperatoren des harmonischen Oszillator. Die Wahrscheinlichkeit, den Oszillator nach dem Impuls im Zustand $|\phi_n\rangle$ zu finden, sei $P_{0,n}$.

(a) Berechnen Sie P_{01} mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung. Plotten Sie $P_{01}(t)$ für festes ω_0. Wann treten Zustandsflips auf? (5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass zur Bestimmung von P_{02} die zeitabhängige Störungstheorie mindestens auf die zweite Ordnung auszudehnen ist. Berechnen Sie P_{02}. (5 Punkte)

○ **Aufgabe 16: Magnonen im Ferromagneten**
In Analogie zu Gitterschwingungen können in Ferromagneten ähnliche Elementaranregungen beobachtet werden. Im Fall der Gitterschwingungen lassen sich die Oszillationen der Gitterionen um ihre Gleichgewichtsposition in Normalmoden mit quantisierten Amplituden zerlegen. Die Quantisierungseinheit heißt Phonon. Die den Normalmoden des Gitters entsprechenden Oszillationen der Ferromagneten werden Spinwellen genannt und ihre Quantisierungseinheit ist das Magnon. Diese sollen nun im Rahmen des Heisenberg-Modells

$$\mathcal{H} = -\sum_{i,j} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \tag{3}$$

genauer analysiert werden. Das Heisenberg-Modell enthält N Spins auf einem Gitter. Hierbei sind $\boldsymbol{S}_i$ die quantenmechanischen Vektoroperatoren zu einer gegebenen Spinquantenzahl, i, j Gitterplätze und J_{ij} die Kopplungskonstanten, bzw. Austauschintegrale. Es gelten die Vereinbarungen

$$J_{ij} = J_{ji}, \quad J_{ii} = 0, \quad J_0 = \sum_i J_{ij} = \sum_j J_{ij}. \tag{4}$$

(a) Drücken Sie den Heisenberg-Hamiltonoperator (3) durch $S_j^\pm$ und S_j^z aus, indem Sie $\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j$ umschreiben.

Bisweilen ist es zweckmäßig, die Spinoperatoren im $\boldsymbol{k}$-Raum zu betrachten. Es gilt die Transformationsvorschrift

$$S_{\boldsymbol{k}}^\alpha = \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} S_i^\alpha, \quad S_i^\alpha = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} S_{\boldsymbol{k}}^\alpha, \tag{5}$$

mit $(\alpha = x, y, z, +, -)$ und der Anzahl N der Spins auf dem Gitter.

(b) Im Ortsraum gelten die bekannten Vertauschungsrelationen

$$[S_i^x, S_i^y] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij} S_i^z, \quad [S_i^z, S_j^\pm] = \pm\hbar\delta_{ij} S_i^\pm, \quad [S_i^+, S_j^-] = 2\hbar\delta_{ij} S_i^z. \tag{6}$$

Leiten Sie die entsprechenden Vertauschungsrelationen im $\boldsymbol{k}$-Raum her.
Zwischenergebnis: Sie sollten folgende Relationen erhalten

$$[S_{\boldsymbol{k}_1}^+, S_{\boldsymbol{k}_2}^-] = 2\hbar S_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}^z, \quad [S_{\boldsymbol{k}_1}^z, S_{\boldsymbol{k}_2}^\pm] = \pm\hbar S_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}^\pm.$$

(c) Transformieren Sie den gesamten Hamiltonoperator in den $\boldsymbol{k}$-Raum. Verwenden Sie den Hamiltonoperator aus (a), sowie

$$J_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)} J_{\boldsymbol{k}}, \tag{7}$$

d.h. die Austauschintegrale hängen nur vom Abstand der Gitterplätz ab.

Der Grundzustand $|g\rangle = |\uparrow, \uparrow, \ldots, \uparrow\rangle$ des Heisenberg-Ferromagneten entspricht der totalen Ausrichtung aller Spins, ein angeregter Zustand hingegen ist $|e\rangle = S_{\boldsymbol{k}}^- |g\rangle$.

(d) Berechnen Sie zunächst den Energieeigenwert des Grundzustandes.
Hinweis: Es gilt

$$S_i^z |g\rangle = \hbar S |g\rangle, \quad S_{\boldsymbol{k}}^z |g\rangle = \hbar N S |g\rangle \delta_{\boldsymbol{k},0}.$$

(e) Im Folgenden wollen wir den Energieeigenwert von $|e\rangle$ berechnen:

(i) Berechnen Sie den Kommutator $[\mathcal{H}, S_{\boldsymbol{k}}^-]$ um ihn anschließend auf den Grundzustand $|g\rangle$ anzuwenden.
Hinweis: Wirkt der Kommutator auf den Grundzustand, erhalten Sie die Dispersionsrelation $\omega(\boldsymbol{k})$, genauer $[\mathcal{H}, S_{\boldsymbol{k}}^-] |g\rangle = \hbar\omega(\boldsymbol{k}) |e\rangle$. Vergegenwärtigen Sie sich, dass Sie $J_{\boldsymbol{k}} = J_{-\boldsymbol{k}}$ in der Rechnung verwenden dürfen und geben Sie einen Ausdruck für $\omega(\boldsymbol{k})$ an.

(ii) Damit sollten Sie in der Lage sein, zu zeigen, dass der obige angeregte Zustand $|e\rangle$ tatsächlich Eigenzustand von $\mathcal{H}$ ist.

(iii) Wie sieht der Energieeigenwert $E(\boldsymbol{k})$ aus?

(f) Für eine kurzreichweitige Wechselwirkung in einer Dimension gilt $J_{ij} = \frac{J}{2}\delta_{j,i\pm1}$. Berechnen und plotten Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$. Nehmen Sie an, dass die Gitterkonstante des eindimensionalen Gitters a sei.

Setzt man nun den Grundzustand als normiert voraus, erhalten wir für

$$\langle g|S^+_{\boldsymbol{k}} S^-_{\boldsymbol{k}}|g\rangle = 2\hbar^2 NS$$

und können den normierten Ein-Magnonzustand

$$|\boldsymbol{k}\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2SN}} S^-_{\boldsymbol{k}} |g\rangle \tag{8}$$

angeben. Dieser ist Eigenzustand von $\mathcal{H}$ zum Eigenwert $E(\boldsymbol{k})$.

(g) Im Folgenden wollen wir die Spindeviation des Ein-Magnonzustands $|\boldsymbol{k}\rangle$ betrachten, um den Begriff der Spinwelle besser zu verstehen.

 (i) Berechnen Sie den Erwartungswert des lokalen Spinoperators S^z_i im Ein-Magnonzustand $|\boldsymbol{k}\rangle$.

 (ii) Interpretieren Sie das Ergebnis und erläutern Sie den Begriff *Spinwelle*.