Fortgeschrittene Vielteilchentheorie (WS 2018/2019) – Blatt 10

◯ Aufgabe 24: Kinematik gemischter Zustände

Wir betrachten ein Spin-1/2-System, bei dem der Spin-Operator in $\boldsymbol{n}$-Richtung in der Basis $\mathcal{B}_z = \{|z+\rangle, |z-\rangle\}$ durch $S_{\boldsymbol{n}} = (-\hbar/2)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ gegeben ist. Der Einheitsvektor ist als

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\theta,\varphi) = (\cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta))^{\mathrm{T}} \quad \text{mit} \quad \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0, 2\pi) \tag{1}$$

parametrisiert. Die Koordinatenachsen werden mit $x \equiv \boldsymbol{n}(\pi/2, 0)$, $y \equiv \boldsymbol{n}(\pi/2, \pi/2)$ und $z \equiv \boldsymbol{n}(0,0)$ abgekürzt. Das System befinde sich im gemischten Zustand

$$\varrho_\lambda = \lambda\,|z+\rangle\langle z+| + (1-\lambda)\,|x+\rangle\langle x+| \tag{2}$$

mit $\lambda \in [0,1]$.

(a) Bestimmen Sie zwei orthonormale Vektoren $|\phi_\lambda^1\rangle$ und $|\phi_\lambda^2\rangle$ so, dass

$$\varrho_\lambda = p_1(\lambda)\left|\phi_\lambda^1\right\rangle\left\langle\phi_\lambda^1\right| + p_2(\lambda)\left|\phi_\lambda^2\right\rangle\left\langle\phi_\lambda^2\right| \tag{3}$$

gilt. Geben Sie $p_1(\lambda)$ und $p_2(\lambda)$ an. Ist die Darstellung (3) eindeutig?

(b) Geben Sie für $\lambda = 1/2$ zwei weitere Darstellungen der Form

$$\varrho_{1/2} = \sum_{i=1}^{N} p_i\,|\chi_i\rangle\langle\chi_i| \tag{4}$$

an. Die Zahl der Summanden N ist hierbei beliebig, die $|\chi_i\rangle$ müssen normiert, aber **nicht** orthogonal sein. Wie viele solcher Darstellungen gibt es? Welche allgemeinen Bedingungen sind an die p_i zu stellen?

(c) Berechnen Sie die von Neumann Entropie

$$S(\lambda) = -\operatorname{tr}[\varrho_\lambda \ln(\varrho_\lambda)] \tag{5}$$

und plotten Sie die Funktion $S(\lambda)$. Für welchen Wert λ' wird $S(\lambda)$ maximal?

Es wird nun der Spin in Richtung $\boldsymbol{n}(\theta,\varphi)$ gemessen.

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit $p_+(\lambda,\theta,\varphi)$ wird der Messwert $s_+ = +\hbar/2$ erhalten? In welchem Zustand befindet sich das System, nachdem s_+ gemessen wurde?
Hinweis: Nach der Messung eines Messwerts a_μ einer Observable A befindet sich das System im Zustand

$$\varrho = \frac{P_\mu \varrho_0 P_\mu}{\operatorname{tr}(P_\mu \varrho_0 P_\mu)},$$

wobei P_μ der Projektionsoperator auf den Unterraum der Eigenzustände zu a_μ ist.

(e) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle S_{\boldsymbol{n}}\rangle_{\varrho_\lambda}$, sowie die Streuung

$$(\Delta S_{\boldsymbol{n}})_{\varrho_\lambda} = \sqrt{\langle S_{\boldsymbol{n}}^2\rangle_{\varrho_\lambda} - \langle S_{\boldsymbol{n}}\rangle_{\varrho_\lambda}^2} \tag{6}$$

als Funktion von λ, θ und φ.

◯ Aufgabe 25: Permutationsoperator

Wir betrachten ein System von zwei Teilchen. Der Operator, welcher der Vertauschung der beiden Teilchen zugeordnet ist, bewirkt

$$P_{21}\,|u_i^{(1)}u_j^{(2)}\rangle \equiv |u_i^{(2)}u_j^{(1)}\rangle\,. \tag{7}$$

Der Operator P_{21} wird als Permutationsoperator bezeichnet. Zeigen Sie, dass für den Operator P_{21}

(a) $P_{21}^{-1} = P_{21}^{\dagger} = P_{21}$ gilt.

(b) P_{21} die Eigenwerte $\lambda = \pm 1$ besitzen kann und die Vektoren

$$|\psi_S\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_i^{(1)}u_j^{(2)}\rangle + |u_i^{(2)}u_j^{(1)}\rangle\right), \quad |\psi_A\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_i^{(1)}u_j^{(2)}\rangle - |u_i^{(2)}u_j^{(1)}\rangle\right), \tag{8}$$

Eigenvektoren von P_{21} sind. Der Index bezieht sich hierbei auf die symmetrische (S), bzw. antisymmetrische (A) Wellenfunktion.

(c) Zeigen Sie, dass für den Ortsoperator q und den Impulsoperator p zweier Teilchen gilt:

(i) $P_{21}q^{(1)}P_{21}^{\dagger} = q^{(2)}$, $P_{21}q^{(2)}P_{21}^{\dagger} = q^{(1)}$

(ii) $P_{21}p^{(1)}P_{21}^{\dagger} = p^{(2)}$, $P_{21}p^{(2)}P_{21}^{\dagger} = p^{(1)}$

Aufgabe 26: Identische Teilchen im Potentialtopf (10 Punkte)

Gegeben seien zwei Teilchen in einem Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq 1 \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{9}$$

Der Hamiltonoperator für zwei Teilchen lautet

$$H = \sum_{i=1}^{2} H^{(i)} \quad \text{mit} \quad H^{(i)} = -\frac{1}{2}\partial_{x_i}^2 + V(x_i). \tag{10}$$

wobei $H^{(i)}$ den Ein-Teilchen-Hamiltonoperator des i-ten Teilchens bezeichnet.

(a) Erklären Sie, warum der Ein-Teilchenzustand als Produkt von Orts- und Spinkomponente geschrieben werden kann. Geben Sie zudem die zwei Ein-Teilchen-Wellenfunktionen niedrigster Energie und die zugehörigen Energien an. Es reicht, wenn Sie nur den Ortsanteil angeben. Bestimmen Sie den Grundzustand des Zwei-Fermionensystems mit dem Hamiltonoperator

für die folgenden zwei Fälle:

- Für einen Spin-Zustand, der antisymmetrisch bezüglich Vertauschung zweier Fermionen ist, d.h. dem Singulett-Zustand $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$.
- Für einen Spin-Zustand, der symmetrische bezüglich Vertauschung ist, d.h. einen der Triplett-Zustände $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ oder $(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$.

Plotten Sie die Wahscheinlichkeitsdichten in beiden Fällen (bspw. mittels Mathematica, Gnuplot, Matlab, ...). (4 Punkte)

(b) Nehmen Sie nun eine Kontaktwechselwirkung zwischen den beiden Fermionen an. Diese sei durch das Potential $\lambda\delta(x_1 - x_2)$ gegeben, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ deren Stärke beschreibt. Um sich den Einfluss dieser bewusst zu werden, bestimmen Sie die Energiekorrekturen erster Ordnung mittels erster Ordnung Störungstheorie ($|\lambda| \ll 1$) sowohl für den Singulett-, als auch für den Triplett-Zustand. Erklären Sie, warum das Ergebnis der Störungstheorie, im Falle des Triplett-Zustands, für alle λ richtig ist. (3 Punkte)

Wir erweitern das Problem auf zwei Dimensionen, sodass

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq a \text{ und } |y| < b \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{11}$$

mit $a < b$ gilt.

(c) Geben Sie den Grundzustand und ersten angeregten Zustand für ein Teilchen, sowie die Energie an. Bestimmen Sie nun analog zu (a) den Grundzustand des Zwei-Fermionensystems für den Fall des Tripletts und des Singletts. (3 Punkte)