Fortgeschrittene Vielteilchentheorie (WS 2018/2019) – Blatt 14

Anmerkung zu den Übungen:
Das Übungsblatt beinhaltet **5 schriftliche Bonuspunkte**. Scheinkriterien sind 66% der Votierpunkte und 80% der schriftlichen Punkte, sowie zweimaliges Vorrechnen.
Wenn Sie die Scheinkriterien erfüllen, sind Sie zur Klausur zugelassen. Sie benötigen dann *keinen* Schein in Papierform, um an der Prüfung teilzunehmen. Die Klausur findet am Donnerstag, den 7. März 2019 statt. Bitte informieren Sie sich rechtzeitig in C@mpus über Ort und Zeit der Prüfung.
Wenn Sie die Prüfung zu einem anderen Zeitpunkt schreiben, kann es sein, dass Sie einen schriftlichen Nachweis Ihres Scheins benötigen. Bitte kommen Sie dann auf uns zu.

◯ **Aufgabe 35: Metrischer Tensor und Feldstärketensor (+ 5 Bonuspunkte)**
Die folgenden Aufgabenteile sollen Ihnen die Grundlagen der kovarianten Fomulierung der speziellen Relativitätstheorie näher bringen.

(a) Sei g_{ij} der metrische Tensor in einem n-dimensionalen Raum. Zeigen Sie, dass g^{ij}, wobei

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \tag{1}$$

ist, auch ein Tensor ist, indem Sie die Transformation herleiten.

Gegeben Sei der Vierervektor A^μ und der Vierervektor der Stromdichte j^μ, welche durch

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho & \boldsymbol{j} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

bestimmt sind, wobei ϕ, $\boldsymbol{A}$ die elektromagnetischen Potentiale, c die Lichtgeschwindigkeit, ρ die Dichte der Ladung und $\boldsymbol{j}$ die Stromdichte ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{4}$$

die gesamte Information über die elektrischen und magnetischen Felder beinhaltet.

(c) Zeigen Sie, dass die inhomogenen Maxwell-Gleichungen sich mittels $F_{\mu\nu}$ ausdrücken lassen.

(d) Bestimmen Sie die homogenen Maxwell-Gleichungen mittels dem dualem Feldstärketensor $\mathcal{F}^{\mu\nu}$, der definiert ist als

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}. \tag{5}$$

(3 schriftliche Bonuspunkte)

(e) Erklären Sie, warum die Maxwell-Gleichungen kovariant unter einer Lorentz-Transformation sind. (2 schriftliche Bonuspunkte)

◯ Aufgabe 36: Kontinuitätsgleichung der Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung für ein freies Teilchen lautet

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0. \tag{6}$$

Die dazu konjugiert-komplexe Gleichung ist

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi^* = 0. \tag{7}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es eine sinnvolle Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte zu finden, sowie ein Interpretationsproblem aufzudecken.

(a) Bilden Sie eine Gleichung aus

$$\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left[\psi^* \cdot (6) - \psi \cdot (7)\right] \tag{8}$$

und zeigen Sie, dass sie auf die Form $\partial_\mu j^\mu$ gebracht werden kann. Identifizieren Sie in dieser analog zur nicht-relativisitischen Quantenmechanik eine Wahrscheinlichhkeitsdichte ϱ und einen Wahrscheinlichkeitsstrom $\boldsymbol{j}$. Was fällt im Vergleich zur nicht-relativistischen Quantenmechanik auf? Welches Problem entsteht daraus?

(b) Begründen Sie, warum $|\psi|^2$ nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{c}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\mu x^\mu}$$

mit $k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}/c = \sqrt{(mc/\hbar)^2 + \boldsymbol{k}^2}$ Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung sind und dass Sie die Orthonormierungsbedingungen

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, f^*_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t) \mathrm{i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{ct} f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r},t) = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'),$$

$$\int \mathrm{d}^3 r\, f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t) \mathrm{i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{ct} f_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r},t) = 0, \quad \int \mathrm{d}^3 r\, f^*_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t) \mathrm{i} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{ct} f^*_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

mit dem Ableitungsoperator $a \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{ct} b = a \partial_{ct} b - (\partial_{ct} a) b$ erfüllen.

(d) Mit den Basisfunktionen $f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}, t)$ lassen sich alle Lösungen positiver und negativer Energie der Klein-Gordon-Gleichung schreiben als

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\, \left[a_{\boldsymbol{k}} f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t) + c^*_{\boldsymbol{k}} f^*_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t)\right],$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten $a_{\boldsymbol{k}}$ und $c^*_{\boldsymbol{k}}$ eingeführt wurden. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $\int \mathrm{d}^3 r\, \varrho(\boldsymbol{r},t)$ ausgedrückt durch die Entwicklungskoeffizienten an. Was fällt in dieser Darstellung deutlich auf?

◯ Aufgabe 37: Lösungen der Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung beschreibt Teilchen mit Spin 1/2 und Masse m und ist durch

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{9}$$

gegeben, wobei $\partial_\mu = (\partial_{x_0}, \nabla)^T$ ist und ψ ein Vierervektor. Beachten Sie, dass über doppelt auftretende Indizes summiert wird, d.h. $\gamma^\mu \partial_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \partial_\mu$. Die Motivation und Bedeutung dieser Gleichung wird in der Vorlesung behandelt werden. Wir kümmern uns nun um die Lösungen dieser Gleichung im Falle freier Teilchen.

(a) Zunächst betrachten wir ein ruhendes freies Teilchen. Dies gelingt durch Wechsel in das mit dem Teilchen mitbewegte Bezugssystem. Geben Sie die Dirac-Gleichung für diesen Fall an. Finden Sie die vier Eigenenergien und -eigenzustände. Gleichzeitig finden Sie damit auch die "berühmteste"Formel der Physik. Was fällt auf?

(b) Lösen Sie nun die Dirac-Gleichung in einem allgemeinen Bezugssystem. Gehen Sie hierzu von den allgemeinen Lösungen

$$\psi^{(+)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\mu x^\mu} u(k) \quad \text{(positive Energien)}, \tag{10}$$

$$\psi^{(-)} = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_\mu x^\mu} v(k) \quad \text{(negative Energien)}, \tag{11}$$

aus. In dieser Form der Lösung ist $k_0 > 0$. Die Lösungen sollen hierbei folgendes erfüllen

$$(k_\mu \gamma^\mu - m)u(k) = 0 \quad \text{(positive Energien)}, \tag{12}$$

$$(k_\mu \gamma^\mu + m)v(k) = 0 \quad \text{(negative Energien)}. \tag{13}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Erkenntnisse aus dem Fall des ruhenden Teilchens, sowie die Tatsache

$$(k_\mu \gamma^\mu - m)(k_\mu \gamma^\mu + m) = k_\mu k^\mu - m^2 = 0.$$

(c) Normieren Sie die Lösungen, sodass

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) = \delta_{\alpha,\beta},$$
$$\bar{u}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(k) = 0,$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(k) v^{(\beta)}(k) = -\delta_{\alpha,\beta},$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) = 0.$$