Übungen zur Vorlesung **SS 2015**
Theoretische Physik LA 2: **Blatt 2**
Elektrodynamik/Thermodynamik Ausgabedatum: 21.04.2015

Ist die Ladungsdichte ρ auf einen Ball von endlichem Radius R beschränkt, so spaltet die Entwicklung von $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ für $r > r'$ das asymptotische Verhalten in der Fernzone $r \gg R$ in Beiträge absteigender Relevanz auf. Im Folgenden untersuchen Sie die sphärische Multipolentwicklung und die Taylorentwicklung in kartesischen Koordinaten.

Aufgabe 4 (Schriftlich) Kugelflächenfunktionen — 6 Punkte

In der Quantenmechanik wurde gezeigt, dass das Quadrat des Drehimpulsoperators als Eigenfunktionen die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ besitzt:

$$\hat{L}^2 \, Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) \, Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Diese erfüllen u.a. die Vollständigkeitsrelation:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sin\theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi'). \tag{1}$$

Aufgrund dieser Relation kann jede Funktion $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})$ nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden:

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{m'=-l'}^{l'} A_{ll'mm'}(r, r') Y^*_{l'm'}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \tag{2}$$

(a) In Kugelkoordinaten gilt $\int \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}) \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi = 1$. Wie können Sie folglich die Delta-Distribution $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})$ durch r^2, $\sin\theta$, $\delta(r - r')$, $\delta(\theta - \theta')$ und $\delta(\phi - \phi')$ ausdrücken? Wie können Sie damit nach Gleichung (1) die Delta-Distribution durch Kugelflächenfunktionen darstellen? (2 Punkte)

(b) In Aufgabe 3 wurde gezeigt, dass $\Delta \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})$. Der Laplace-Operator lautet in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hat{L}^2}{r^2}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (a), dass sich mit Gleichung (2) für $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$ folgende Differenzialgleichung für die $A_{ll'mm'}$ ergibt:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) A_{ll'mm'}(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$ (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass für $r > r'$

$$A_{ll'mm'}(r, r') = g(r, r') \, \delta_{ll'} \delta_{mm'} \qquad \text{mit} \qquad g(r, r') = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(r')^l}{r^{l+1}}$$

diese Differenzialgleichung löst. (2 Punkte)

Aufgabe 5 (Votier) Taylorentwicklung von Feldern **9 Punkte**

(a) Die Taylorentwicklung einer Funktion einer Variablen x um x_0 lautet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Zeigen Sie, dass die Taylor-Reihe eines skalaren Feldes $\varphi(\boldsymbol{r})$ gegeben ist durch

$$\varphi(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta\boldsymbol{r} \cdot \nabla)^n \varphi(\boldsymbol{r}). \tag{3}$$

Definieren Sie hierzu $F(t) = \varphi(x_1 + \Delta x_1 t, x_2 + \Delta x_2 t, x_3 + \Delta x_3 t) = \varphi(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}t)$ und entwickeln Sie diesen Ausdruck um $t = 0$. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie mit Gleichung (3) die Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ um den Punkt $\boldsymbol{r} = 0$ in kartesischen Koordinaten bis zur 2. Ordnung. Geben Sie damit die Monopol-, Dipol- und Quadrupolterme des Potenzials ϕ mit

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\boldsymbol{r}' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{4}$$

einer Ladungsverteilung an. (6 Punkte)

Aufgabe 6 Sphärische Multipolmomente **Vortragsübung**

Wie in Aufgabe 4 motiviert, lautet die sphärische Multipolentwicklung von $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ für $r > r'$:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{4\pi}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

mit den aus der Quantenmechanik bekannten Y_{lm}. Leiten Sie mit Gleichung (4) folgende Multipolentwicklung her und geben Sie q_{lm} an:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{+l} q_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)\,.$$

Berechnen Sie q_{lm} für $l = 0, 1$ explizit.

Wie lassen sich diese sphärischen Multipolmomente q_{lm} für $l = 0, 1$ durch die kartesischen Monopol- und Dipolmomente q und $\boldsymbol{p}$ ausdrücken?