Übungen zur Vorlesung **SS 2015**
Theoretische Physik LA 2: **Blatt 4**
Elektrodynamik/Thermodynamik Ausgabedatum: 05.05.2015

Aufgabe 10 (Votier) Quadrupolmoment — 5 Punkte

(a) Leiten Sie – analog zum Vorgehen in der Vorlesung für das Potenzial eines Dipols – das Potenzial eines Quadrupols aus der Summe zweier Dipolpotenziale her. Das Quadrupolmoment zweier antiparalleler, gleich großer Dipole $\boldsymbol{p}$ im Abstand $\boldsymbol{d}$ ist dabei definiert über:

$$Q_{ij} = \lim_{\substack{d_i \to 0 \\ p_j \to \infty}} \left\{ 3(d_i p_j + p_i d_j) - 2(d_k p_k)\delta_{ij} \right\},$$

wobei die Q_{ij} beim Grenzübergang endlich bleiben. Benutzen Sie Resultate aus Aufgabe 2. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie das Potenzial eines gestreckten linearen Quadrupols in der Fernzone ($r \gg d$). Dieser bestehe aus drei Punktladungen $+q$, $-2q$ und $+q$ bei $z = -a,\ 0,\ a$. (2 Punkte)

Aufgabe 11 Hohlkugel im elektrischen Feld — Vortragsübung

In dieser Aufgabe lernen Sie an einem noch relativ einfachen Beispiel, wie man aus dem Randwertproblem der Elektrostatik das zugehörige elektrische Potenzial gewinnen kann. Mit diesem lassen sich dann weitere physikalisch relevante Größen des Problems ermitteln.

Eine geerdete Metallhohlkugel mit dem Radius R werde in ein homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}_0$ gebracht. Hierdurch werden auf der Kugel Ladungen influenziert, die ein Dipolfeld erzeugen. Berechnen Sie dieses.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an. Wieso folgt für das Potenzial ϕ, dass $\phi(r = R) = \phi_0$ und $\phi(r \to \infty) \to -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$? Wie sieht demnach ϕ für ein räumlich konstantes elektrisches Feld aus? Begründen Sie damit den Ansatz

$$\phi(\mathbf{r}) = -\left(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}\right)\left[1 + f(r)\right].$$

(b) Was gilt für $\Delta\phi(\mathbf{r})$ außerhalb der Kugel? Bestimmen Sie ∇f und $\nabla\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$. Leiten Sie damit die Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{4}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 0$$

her. Lösen Sie diese mit einem Potenzreihenansatz. Benutzen Sie die Randbedingungen, um die Integrationskonstanten zu bestimmen.
Endergebnis: $f = -R^3/r^3$

(c) Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte $\sigma(R) = -\epsilon_0\, \mathbf{e}_r \cdot \nabla\phi$ auf der Kugel.

(d) Berechnen Sie die Gesamtladung $Q = \int \sigma \, \mathrm{d}f$ der Kugel.

(e) Ermitteln Sie das Dipolmoment $\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \, \sigma \, \mathrm{d}f$ der Kugel.

Aufgabe 12 (Votier) Vektorpotenzial **4 Punkte**

In der vorherigen Aufgabe haben Sie gesehen, wie Probleme der Elektrostatik mit Hilfe des elektrischen Potenziales ϕ dargestellt werden können. Zur Beschreibung der magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ kann in ähnlicher Weise das Vektorpotenzial $\boldsymbol{A}$ herangezogen werden. Wie sieht dieses für ein räumlich konstantes Magnetfeld aus?

- Berechnen Sie zunächst $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{r})$, wobei der Vektor $\boldsymbol{C}$ ortsunabhängig sei.
- Bestimmen Sie damit ein Vektorpotenzial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ einer räumlich konstanten magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_0 = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$.

Aufgabe 13 (Schriftlich) Parallele Leiterdrähte **8 Punkte**

Untersuchen Sie zwei lange, parallele, gerade Drähte mit dem Abstand d, durch die die Ströme I_1 und I_2 fließen. Diese seien im Unendlichen so verbunden, dass die Kraft $\mathrm{d}\mathbf{F}_{21}$ auf das Längenelement $\mathrm{d}y_1$ des ersten Drahtes am Ort $\mathbf{r}_1 = y_1 \mathbf{e}_y$ gegeben ist durch:

$$d\mathbf{F}_{21} = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \, \mathrm{d}y_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \mathrm{d}y_2 \, .$$

Weiterhin sei $\mathbf{r}_{21} = -d \, \mathbf{e}_x - (y_2 - y_1) \, \mathbf{e}_y$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an. Geben Sie r_{21}^2 und r_{21}^3 an. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_2} \left(\frac{y_2 - y_1}{d^2 (d^2 + (y_2 - y_1)^2)^{1/2}} \right) = \frac{1}{(d^2 + (y_2 - y_1)^2)^{3/2}} \, . \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(c) Benutzen Sie dieses Ergebnis und ermitteln Sie damit die vom zweiten Draht auf den ersten Draht ausgeübte Kraft pro Länge $\frac{d\mathbf{F}_{21}}{\mathrm{d}y_1}$ in x-Richtung. Was geschieht mit dem Anteil der Kraft in y-Richtung? (3 Punkte)