Aufgabe 14 (Schriftlich) Biot-Savart-Gesetz — 4 Punkte

In dieser Aufgabe leiten Sie das Biot-Savart-Gesetz aus den Maxwellgleichungen ab. Diese lauten für das Magnetfeld eines elektrischen Leiters

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0\,, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}\,.$$

Ein divergenzfreies Vektorfeld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ lässt sich (ohne Beweis) schreiben als

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot}_r \left[\frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\operatorname{rot}'_r \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right] = \operatorname{rot}_r \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,.$$

Benutzen Sie Ergebnisse von Blatt 4. Leiten Sie damit das Biot-Savart-Gesetz für eine Stromdichteverteilung $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ her und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus der Vorlesung bekannten Gesetz

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\,.$$

Ein stromdurchflossenes Drahtsegment $d\boldsymbol{l}$ erzeugt demnach ein Magnetfeld $d\boldsymbol{B}$. Wieso üben demnach zwei stromdurchflossene Leiter Kräfte aufeinander aus?

Aufgabe 15 Grenzflächenverhalten, Magnetostatik — Vortragsübung

In dieser Aufgabe beschäftigen Sie sich mit dem Feldverhalten an Grenzflächen. Benutzen Sie die Integralsätze, um Aussagen für die Magnetostatik abzuleiten. Berechnen Sie damit anschließend die Felder in einer ringförmigen Spule.

(a) Beweisen Sie, dass die Normalkomponente der magnetischen Induktion an einer Grenzfläche stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Tangentialkomponente des **H**-Feldes bei verschwindender Flächenstromdichte an einer Grenzfläche stetig ist.

(c) In einer ringförmigen Spule (Torus mit Radius R, Wicklungsradius r mit $r \ll R$, N Windungen, Strom I) befinde sich ein Eisenkern mit Permeabilität μ, der aus zwei Hälften besteht, zwischen denen sich zwei kleine Luftspalte der Dicke $d \ll r$ befinden. Fertigen Sie eine Skizze an. Berechnen Sie die Felder **B**, **H** und **M** im Eisen und in den Spalten unter der Vernachlässigung von Streufeldern. Berechnen Sie zum Vergleich das **H**-Feld einer identischen Spule ohne Eisenkern.

Aufgabe 16 (Schriftlich) Polarisation **5 Punkte**

Für die Feldstärke $\mathbf{E}$ einer sich in z-Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Welle gilt:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y \quad \text{mit}$$

$$E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \phi)$$
$$E_y = |E_{0y}| \cos(kz - \omega t + \phi + \delta)$$

(a) Zeigen Sie, dass sich für $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$ eine linear polarisierte Welle ergibt. Welcher Winkel besteht bei gegebenen $|E_{0x}|$ und $|E_{0y}|$ zwischen dem Feldstärkevektor und der y-Achse? (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass sich für $\delta = \pm\pi/2$ und $|E_{0x}| = |E_{0y}|$ zirkular polarisierte Wellen ergeben. Wann spricht man von einer links- bzw. rechts-zirkular polarisierten Welle? Skizzieren Sie diese. (3 Punkte)

Aufgabe 17 (Votier) Elektromagnetische Welle im Vakuum **12 Punkte**

Im Folgenden untersuchen Sie die Maxwell-Gleichungen für das Vakuum und die zugehörigen Lösungen. Wie sind die Felder zur Ausbreitungsrichtung einer elektromagnetischen Welle orientiert?

(a) Betrachten Sie die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{und}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0}\,.$$

Zeigen Sie, dass sich $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ durch ein Vektorpotential $\mathbf{A}$ und ein skalares Potenzial Φ darstellen lassen:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}\,, \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \dot{\mathbf{A}}\,.$$ (2 Punkte)

(b) Eine Transformation $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\Lambda$ mit einer skalaren Funktion Λ ändert $\mathbf{B}$ nicht. Wie muss die entsprechende Transformation für Φ lauten? Welcher Gleichung muss Λ genügen, damit $\mathbf{A}$ und Φ weiterhin die Lorentz-Bedingung $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} = 0$ erfüllen (c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum)? (2 Punkte)

(c) Betrachten Sie nun die inhomogenen Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \text{und}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}} = \mu_0\,\mathbf{j}$$

(Ladungsdichte ρ, Stromdichte $\mathbf{j}$). Zeigen Sie, dass diese äquivalent zu den Gleichungen

$$\Box\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j} \qquad \text{und} \qquad \Box\Phi = -\rho/\epsilon_0 \tag{1}$$

sind, sofern $\mathbf{A}$ und Φ die Lorentz-Bedingung erfüllen ($\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ist der d'Alembert-Operator). (4 Punkte)

(d) Für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ werden die Gleichungen (1) durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \qquad \text{und} \qquad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \tag{2}$$

gelöst. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen ω und $\mathbf{k}$. Berechnen Sie $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ aus den Gleichungen (2). Zeigen und benutzen Sie

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B_0} \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B_0} = \mathbf{A_0} \times \mathbf{k}\,.$$

Bestimmen Sie die relative Orientierung der Vektoren $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{k}$. In welche Richtung zeigt $\mathbf{A_0}$? (4 Punkte)