Übungen zur Vorlesung **SS 2015**
Theoretische Physik LA 2: **Blatt 8**
Elektrodynamik/Thermodynamik Ausgabedatum: 09.06.2012

Aufgabe 25 Abzählende Kombinatorik **Vortragsübung**

In kombinatorischen Aufgaben werden aus einer vorgegebenen Menge von n unterschiedlichen Elementen Kombinationen von k Elementen gebildet ($n, k \in \mathbb{N}$), wobei sich durch die folgenden Einschränkungen vier Typen von Aufgaben ergeben:

I) Die Wiederholung gleicher Elemente ist zulässig (mit Zurücklegen).

II) Alle Elemente müssen voneinander verschieden sein (ohne Zurücklegen).

III) Die Anordnung der Elemente (Variationen) wird berücksichtigt.

IV) Die durch Umordnung entstehenden Kombinationen werden als gleich aufgefasst (ohne Berücksichtigung der Anordnung).

Für die Zahl N_c der Kombinationen von k aus n unterschiedlichen Elementen ($k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$) ergibt sich

1) mit den Annahmen II + III: $N_c = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)\,;$

2) mit den Annahmen II + IV: $N_c = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}\,;$

3) mit den Annahmen I + III: $N_c = n^k\,;$

4) mit den Annahmen I + IV: $N_c = \binom{n+k-1}{k}\,.$

- Beweisen Sie die Behauptungen 1)–4).
- Sie haben beim Lotto am Samstag (6 aus 49) mitgespielt:
  - Welche der obigen Annahmen treffen zu?
  - Wieviele Möglichkeiten gibt es, sechs aus 49 Kugeln zu ziehen?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwarten Sie demnach sechs Richtige?
  - Mit welcher Strategie würden Sie diese sicher erreichen?
  - Sie spielen jede Woche Lotto. Nach wievielen Jahren können Sie durchschnittlich auf sechs Richtige hoffen?
  - Wie wahrscheinlich sind drei Richtige?
  - Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie keine einzige Zahl richtig getippt haben?

Aufgabe 26 (Votier) Zustandsgleichung II **8 Punkte**

Die Länge L eines Eisenstabes ist abhängig von seiner Temperatur T und der längs der Stabachse wirkenden Spannung σ. Aus Messungen kennt man für kleine σ und kleine Temperaturänderungen $(T - T_0)$ die Beziehungen

$$L = a(T)[1 + b(T)\sigma] \qquad \text{für } T = \text{const}, \tag{1}$$

$$L = c(\sigma)[1 + d(\sigma)(T - T_0)] \qquad \text{für } \sigma = \text{const}. \tag{2}$$

(a) Erinnern Sie sich an Aufgabe 19. Geben Sie allgemein das vollständige Differenzial von $L(\sigma, T)$ an. Wie lautet die Integrabilitätsbedingung? Welcher Zusammenhang besteht damit zwischen den Funktionen a, b, c und d, falls L eine Zustandsfunktion ist? (2 Punkte)

(b) Ermitteln Sie daraus durch Trennung der Variablen das vollständige Differenzial von L. Integrieren Sie $\frac{\partial L}{\partial T}$ und $\frac{\partial L}{\partial \sigma}$. Führen Sie einen Koeffizientenvergleich durch. Wie lautet damit die Zustandsgleichung $L = L(\sigma, T)$? (2 Punkte)

(c) Linearisieren Sie die Zustandsgleichung: $L \approx K_1 T + K_2 \sigma + K_3$. Führen Sie in geeigneter Weise einen Elastizitätsmodul ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa) und einen linearen Ausdehnungskoeffizienten ($\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$) ein. Achten Sie auf die Einheiten. Identifizieren Sie die Konstanten a, b, c und d. Hätte man diese aus den Beziehungen (1) und (2) bereits erraten können? (2 Punkte)

(d) Benutzen Sie die lineare Näherung für das folgende Beispiel: Eine Eisenbahnschiene sei bei $T = 10\,°\mathrm{C}$ ohne Spiel an den Schienenstößen verlegt worden. Unter welcher Spannung steht sie bei $30\,°\mathrm{C}$? (2 Punkte)

Aufgabe 27 (Schriftlich) Das Sammelalben-Problem **5 Punkte**

Zur Fußball-Europameisterschaft werden Sammelbilder verkauft, die in ein Album zu kleben sind. Insgesamt sind n verschiedene Aufkleber nötig, um ein Heft zu füllen. Ein zugehöriges Bild kostet c Euro. Alle Motive treten mit derselben Wahrscheinlichkeit p auf.

- Ermitteln Sie p. Sie kaufen zwei Sammelbilder. Das erste Motiv kleben Sie in das leere Album. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können Sie auch das nächste Motiv einkleben? Wieviele Aufkleber benötigen Sie damit durchschnittlich für zwei Bilder im Album?

- In ihrem Heft befinden sich bereits m unterschiedliche Aufkleber. Wieviele weitere benötigen Sie im Mittel, um einen hinzufügen zu können? Wieviele Bilder müssen Sie damit durchschnittlich kaufen, um das Album komplett zu füllen?
  Hinweis: Benutzen Sie die folgende Näherungsformel für die harmonische Reihe ($n \gg 1$):
  $$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx 0.577 + \ln(n)\,.$$

- Es sei nun $n = 540$ und $c = 0.12$. Was kostet ein vollständig gefülltes Album im günstigsten Fall? Was kostet es im Mittel? Wieviele Bilder müssten Sie hierfür durchschnittlich kaufen?