Übungen zur Vorlesung **SS 2015**
Theoretische Physik LA 2: **Blatt 9**
Elektrodynamik/Thermodynamik Ausgabedatum: 16.06.2015

Aufgabe 28 (Votier) Geburtstagsprobleme — 7 Punkte

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit P_1, dass in einer Gruppe von n Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben? Dabei werde das Geburtsjahr nicht berücksichtigt. Zudem werde angenommen, dass die Anzahl der Geburten im Jahresverlauf nicht schwankt.

- Wie viele mögliche Geburtstagsvariationen N_{G} gibt es für n Personen?
- Wie viele Fälle N_{U} davon beinhalten nur unterschiedliche Geburtstage?
- Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit
$$P_1(n) = 1 - \frac{N_{\mathrm{U}}}{N_{\mathrm{G}}}$$
für mindestens einen doppelt auftretenden Geburtstag.
- In Ihrer Übungsgruppe befinden sich etwa zehn Personen. Berechnen Sie $P_1(10)$.
- Ab welcher Gruppengröße ist $P_1 = 1$?

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit P_2, dass in einer Gruppe von n Personen mindestens eine Person denselben Geburtstag wie Sie hat?

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit P_{N}, an einem bestimmten Tag *nicht* Geburtstag zu haben?
- Geben Sie die Wahrscheinlichkeit
$$P_2(n) = 1 - P_{\mathrm{N}}^n$$
an. Wieso liefert diese das gewünschte Ergebnis? Bestimmen Sie $P_2(10)$.

Aufgabe 29 (Schriftlich) Ideales Gas — 7 Punkte

(a) Die folgenden Gleichungen sind für ein Mol eines idealen Gases gültig:
$$Pv = RT, \qquad u = \frac{3}{2}RT\,.$$
Bestimmen Sie damit T, P, $1/T$ und P/T. Was folgt daraus für $\frac{\partial U}{\partial S}$, $\frac{\partial U}{\partial V}$, $\frac{\partial S}{\partial U}$ und $\frac{\partial S}{\partial V}$? Zeigen Sie, dass für adiabatische Prozesse ($dS = \frac{\partial S}{\partial U}dU + \frac{\partial S}{\partial V}dV = 0$)
$$Pv^\gamma = \text{const.}$$
gilt und bestimmen Sie γ. Beachten Sie dabei, dass $\mathrm{d}\ln X = \mathrm{d}X/X$. (4 Punkte)

(b) Zeichnen Sie Isothermen (T=const.), Isochoren (v=const.), Isobaren (P=const.) und Adiabaten

- in ein P-v-Diagramm und
- in ein P-ρ-Diagramm. (3 Punkte)

Aufgabe 30 (Votier) Spinsystem **4 Punkte**

Für die Entartungsfunktion g eines Spinsystemes in einem Magnetfeld gilt (siehe Vorlesung):

$$g(U,N) = X(N) \cdot e^{-Y(N)U^2} .$$

- Bestimmen Sie die Entropie $S = k_B \cdot \ln g(U,N)$ und skizzieren Sie sie in einem $S-U-$Diagramm.
- Widersprechen sich das Ergebnis und Postulat III (die Entropie ist eine monoton ansteigende Funktion der inneren Energie)? Berechnen Sie zur Beantwortung dieser Frage die Temperatur des Systems. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Nernst-Postulates.

Aufgabe 31 Spezifische Wärme **Vortragsübung**

Zeigen Sie, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$c_P = c_V + \frac{TV\alpha^2}{N\kappa_T} \quad . \tag{1}$$

- Beginnen Sie mit dem vollständigen Differenzial von $S = S(T,V)$. Wechseln Sie zu den Variablen (T,P), indem Sie V als Funktion von T und P auffassen: $V(T,P)$. Berechnen Sie $\frac{\partial S}{\partial T}\big|_P$ und ersetzen Sie die bekannten Ableitungen.
- Bestimmen Sie $\frac{\partial S}{\partial V}\big|_T$: Die Integrabilitätsbedingung für die freie Energie (die sie später in der Vorlesung kennenlernen werden) erzwingt, dass $\frac{\partial S}{\partial V}\big|_T = \frac{\partial P}{\partial T}\big|_V$. Um den Zusammenhang (1) zu zeigen, muss nun noch bewiesen werden, dass
$$\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V = \frac{\alpha}{\kappa_T} \quad . \tag{2}$$
Vergleichen Sie hierzu die Koeffizienten des Differenzials von $T = T(P, V(T,P))$ und ersetzen Sie dV wie zuvor.

Hinweis: Die in (1) enthaltenen Koeffizienten sind folgendermaßen definiert:

Isobare spezifische Wärme: $c_P = \frac{T}{N}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$

Isochore spezifische Wärme: $c_V = \frac{T}{N}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$

Thermischer Ausdehnungskoeffizient: $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

Isotherme Kompressibilität: $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$