Übungen zur Vorlesung **SS 2015**
Theoretische Physik LA 2: **Blatt 12**
Elektrodynamik/Thermodynamik Ausgabedatum: 07.07.2015

Aufgabe 38 (Votier) Clausius-Clapeyron-Gleichung **2 Punkte**

Betrachten Sie die Koexistenz von Wasser und Eis, um die Druckabhängigkeit der Schmelztemperatur zu bestimmen. Was bewirkt eine Erhöhung des Druckes um 136 bar? Begründen Sie damit die Bewegung von Gletschern.

Hinweise: Die latente Wärme von schmelzendem Wasser bei 0°C ist $3.35 \cdot 10^5$ J/kg. Die spezifischen Volumina der festen und flüssigen Phasen sind $v_{\text{fest}} = 1.09 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{kg}$ und $v_{\text{flüssig}} = 1.00 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{kg}$.

Aufgabe 39 (Votier) Einstein-Modell **7 Punkte**

In einem abgeschlossenen System befinden sich N harmonische Quanten-Oszillatoren der charakteristischen Frequenz ω. Die Energie des Oszillators i ($i = 1, 2, \ldots, N$) ist gegeben durch $e_i = \hbar\omega(n_i + \frac{1}{2})$. Dabei ist n_i ($n_i = 0, 1, 2\ldots$) die Anzahl der Schwingungsquanten am Oszillator mit der Nummer i.

(a) Geben Sie die Temperatur T und die Entropie S dieses Systems als Funktion der Gesamtenergie

$$U = \sum_i e_i = \sum_i \hbar\omega(n_i + \frac{1}{2}) =: \hbar\omega(M + \frac{N}{2})$$

mit $M = \sum_i n_i$ an. (4 Punkte)

Hinweise:

- Bei Vorgabe der Gesamtenergie U arbeiten Sie unter mikrokanonischen Bedingungen. Gehen Sie von der Anzahl der Möglichkeiten aus, M ununterscheidbare Schwingungsquanten auf N Oszillatoren zu verteilen (siehe Aufgabe 25).
- Benutzen Sie anschließend die Stirling-Formel: $\ln n! \approx n \ln n - n$ für $n \gg 1$.
- *Zwischenergebnis:* $S(M, N)/k_B \approx M \ln \frac{M+N}{M} + N \ln \frac{M+N}{N}$ für $M,\ N \gg 1$.
- Berechnen Sie $S(U, N)$, indem Sie $M(U, N)$ ermitteln und einsetzen.
- Die Temperatur erhalten Sie aus der Ableitung $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$.

(b) Ermitteln Sie aus $T(U, N)$ die Gesamtenergie $U(T, N)$ als Funktion der Temperatur. Berechnen Sie damit die spezifische Wärme $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}$ und diskutieren Sie deren Temperaturverlauf. Welcher Wert ergibt sich für $T \to \infty$? Wie verhält sich C_V für $T \to 0$? (3 Punkte)

In der Festkörperphysik wurde dieses Modell eingesetzt, um den Beitrag der Gitterschwingungen (Phononen) zur Wärmekapazität eines kristallinen Festkörpers zu erklären.

Aufgabe 40 (Votier) Freie Energien von Oszillatoren **4 Punkte**

Gegeben sind die Hamilton-Funktionen eines klassischen und eines quantenmechanischen Oszillators der Frequenz ω:

$$H_k(p,q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2\,, \qquad H_q = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})\,.$$

- Berechnen Sie die kanonischen Zustandssummen

  $$Z_k(\beta) = \int \frac{dp\,dq}{h} e^{-\beta H_k(p,q)}$$

  und

  $$Z_q(\beta) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_q} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}$$

  mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Skizzieren Sie $\frac{1}{Z_k(\beta)}$ und $\frac{1}{Z_q(\beta)}$. In welchem Temperaturbereich unterscheiden sich die Zustandssummen?

  Hinweise: Benutzen Sie $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Veranschaulichen Sie $y = \sinh(x)$.

- Bestimmen Sie die freien Energien

  $$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z(\beta)$$

  und vergleichen Sie diese für $T \to \infty$ und für $T \to 0$. Interpretieren Sie die Resultate.