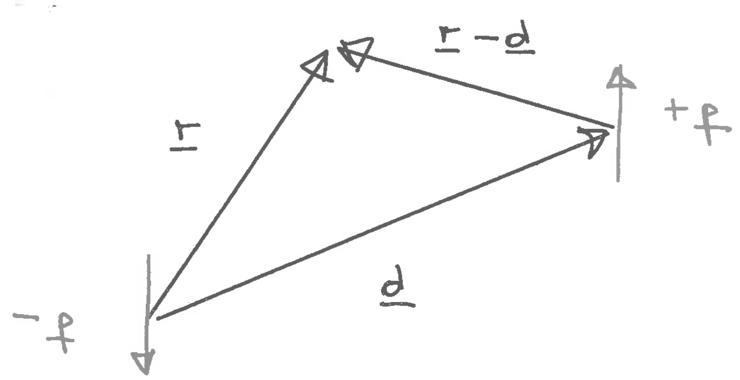
d) Beispiel Quadrupol (Übungen)



• Falls $Q_{ij} = \lim_{\substack{d_i \to 0 \\ p_j \to \infty}} \{3 d_i p_j - d_k p_k \delta_{ij}\}$ endlich (2.44)

$$\varphi_Q(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \underline{r} \cdot \{3 \underline{d} \otimes \underline{p} - \underline{\underline{1}} (\underline{d} \cdot \underline{p})\} \underline{r} =$$

$$=: \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \underline{r} \cdot \underline{\underline{Q}} \, \underline{r} = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \underline{\underline{Q}} : \{3 \underline{r} \otimes \underline{r} - r^2 \underline{\underline{1}}\}$$

(2.45) vgl. (2.31)

• Taylorentwicklung nach Potenzen in $\frac{r'}{r}$:

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \stackrel{!}{=} \exp\{-\underline{r}' \cdot \nabla\} \frac{1}{r} =$$

$$= \frac{1}{r} - (\underline{r}' \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\underline{r}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r^2} \pm \ldots$$

$$\stackrel{\text{Üb.}}{\underset{(2.28)}{=}} \frac{1}{r} + \frac{\underline{r}' \cdot \underline{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\underline{r}' \cdot \underline{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \ldots \qquad (2.47)$$

• Folgt:

$$4\pi\varepsilon_0 \varphi(\underline{r}) = \frac{1}{r} \int d^3\underline{r}' \varrho(\underline{r}') + \frac{\underline{r}}{r^3} \cdot \int d^3\underline{r}' \, \underline{r}' \varrho(\underline{r}')$$

$$+ \frac{1}{2r^5} \underline{r} \cdot \int d^3\underline{r}' \varrho(\underline{r}') \{3(\underline{r}' \otimes \underline{r}') - \underline{\underline{1}} r'^2\} \underline{r} =$$

$$=: \frac{q}{r} + \frac{\underline{r}\cdot\underline{p}}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{\underline{r}\cdot\underline{\underline{Q}}\,\underline{r}}{r^5} + \ldots \qquad (2.48)$$

mit

i) Monopolterm $\quad q = \int d^3\underline{r}'\,\varrho(\underline{r}') \qquad (2.49)$

ii) Dipolterm $\quad \underline{p} = \int d^3\underline{r}'\,\underline{r}'\varrho(\underline{r}') \qquad (2.50)$

- NB! ändert sich bei Verschiebung des Ursprungs, es sei denn $q = 0$.
- $\underline{p} = \underline{0}$ bei spiegelsymmetrischer Ladungsverteilung

iii) Quadrupolterm mit

$$Q_{ij} = \int d^3\underline{r}'\,\varrho(\underline{r}')\left\{3x_i'x_j' - \underline{r}'^2\delta_{ij}\right\} \qquad (2.51)$$

- Symmetrisch, spurlos ($\mathrm{sp}\,\underline{\underline{Q}} = 0$).

b) <u>Sphärische Multipolmomente</u>

- Es gilt (oB, Übungen) die Reihenentwicklung für $r > r'$:

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{4\pi}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\frac{1}{2l+1}\left(\frac{r'}{r}\right)^l Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \qquad (2.52)$$

mit den Kugelflächenfunktion

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \qquad (2.53)$$

wie im QM-Manuskript (6.32)

- NB! $\quad Y_{l,-m}(\vartheta,\varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi) \qquad (2.54)$

- Mit der kartesischen Darstellung der Kugelflächenfunktionen in QM (6.32) zeigt sich (2.52) identisch zu (2.48) (Übungen).

- Es folgt für das Potenzial:

$$\varphi(\underline{r}) \overset{(2.46)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\varrho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} =$$

$$\overset{(2.52)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^l} \underbrace{\int d^3\underline{r}' \, r'^l \varrho(\underline{r}') Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi')}_{} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

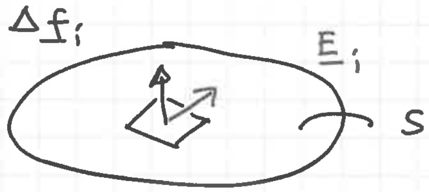
$$=: \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{+l} q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \qquad (2.55)$$

- NB! Vergleiche q_{1m} mit p_i (2.50)
  und q_{2m} mit Q_{ij} (2.51) (Übungen)

2.5 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

a) Mathematische Vorbemerkungen

i) Flächenintegrale



- S Fläche

$$\sum_i \underline{E}_i \cdot \Delta \underline{f}_i \longrightarrow \int_S d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \text{: "Elektrischer Fluss"} \qquad (2.56)$$

- Genauer: $S = \{ \underline{r}(u,v) \mid (u,v) \in A \subset \mathbb{R}^2 \text{ Parameter} \}$ (2.57)

$$\int_S d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_A du\, dv \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right) \cdot \underline{E}(\underline{r}(u,v)) \qquad (2.58)$$

• Sei der Träger von ρ so klein und φ_{ex} so glatt, dass man entwickeln kann:

$$\varphi_{ex}(\underline{r}) = \varphi_{ex}(\underline{0}) + (\underline{r}\cdot\nabla)\varphi_{ex}(\underline{0}) + \tfrac{1}{2}(\underline{r}\cdot\nabla)^2\varphi_{ex}(\underline{0}) + \dots$$

$$\overset{(2.17)}{=} \varphi_{ex}(\underline{0}) - \underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{0}) + \frac{1}{6}\sum_{i,j}\{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\}\frac{\partial^2\varphi_{ex}}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{0}) + \dots$$

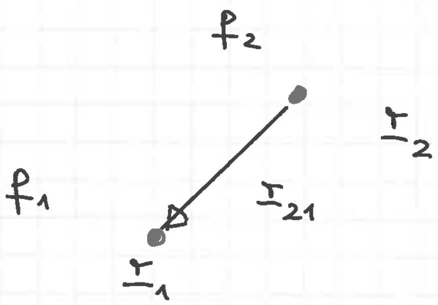
$$\uparrow \quad \operatorname{div}\underline{E}_{ex} = 0 \qquad (2.98)$$

<NB! keine Wirkung von ∇ auf $\underline{r}$>

• In (2.97):

$$W_{WW} \overset{(2.49)-(2.51)}{=} q\,\varphi_{ex}(\underline{0}) - \underline{p}\cdot\underline{E}(\underline{0}) - \frac{1}{6}\overbrace{\underline{\underline{Q}}:(\nabla\otimes\underline{E})}^{Q_{ij}(\partial_i E_j) = Q_{ij}E_{j,i}} + \dots \quad (2.99)$$

• Wechselwirkung zwischen zwei Dipolen:



$$W_{D_1D_2} = -\underline{p}_1\cdot\underline{E}_2(\underline{r}_{21}) \overset{(2.36)}{=} -\underline{p}_1\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3\underline{r}_{21}(\underline{r}_{21}\cdot\underline{p}_2)}{r_{21}^5} - \frac{\underline{p}_2}{r_{21}^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\underline{p}_1\cdot\underline{p}_2}{r_{12}^3} - \frac{3(\underline{r}_{12}\cdot\underline{p}_1)(\underline{r}_{12}\cdot\underline{p}_2)}{r_{12}^5}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}^3}\,\underline{p}_1\cdot\{3\,\hat{\underline{r}}_{12}\otimes\hat{\underline{r}}_{12} - 1\}\,\underline{p}_2 \qquad (2.100)$$

<Nächstes Ziel: Lösung des Randwertproblems der Elektrostatik (2.70). Dazu als mathematische Vorbereitung:>