und der relativen Permeabilität $\underline{\underline{\mu}} = 1 + \underline{\underline{\chi}}_m$ (4.80)

- Also: $\underline{B} = (1 + \underline{\underline{\chi}}_m)\, \mu_0 \underline{H} = \mu_0 \underline{\underline{\mu}}\, \underline{H}$ (4.81)
- Nicht magnetisierbare Medien: $\underline{\underline{\chi}}_m = 0$, $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$

< vgl. $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}\ \underline{E}$ Rollen vertauscht >

d) Einteilung der magnetischen Stoffe

i.A. $\underline{\underline{\chi}}_m = \chi_m \underline{\underline{1}}$

i) Diamagnetismus: $\chi_m < 0$, $\chi_m = \text{const}$, $|\chi_m| \approx 10^{-5}$

- Dipole werden dem Feld entgegengesetzt induziert (siehe Lenzsche Regel)
- Beispiele: Organische Substanzen, Edelmetalle
- Ideale Diamagnete: Supraleiter $\chi_m = -1$, keine magnetische Induktion im Innern.

ii) Paramagnetismus: $\chi_m \gtrsim 0$, $\chi_m = \chi_m(T)$

- Ausrichtung ungeordneter permanenter Dipole, entweder Atome (nicht voll besetzte Schalen), oder frei Leitungselektronen (Pauli-Paramagnetismus)

iii) Kollektiver Magnetismus

- Antwort nichtlinear $\chi_m = \chi_m(T, H)$
- Permanente Dipole, die sich unterhalb einer „Kritischen Temperatur" T^* spontan ausrichten

- Ferromagnetismus : $T^* \equiv T_c$ = Curietemperatur

  $\uparrow\uparrow\uparrow$

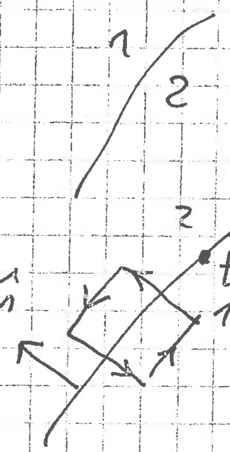
- Antiferromagnetismus $T^* = T_N$ = Néeltemperatur

  $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$: Untergitter

- Ferrimagnetismus :

  $\uparrow_\downarrow \uparrow_\downarrow$: $T^* = T_c$ $\quad M_A \neq M_B$

e) Grenzflächenverhalten



- $\operatorname{div} \underline{B} = 0 \Rightarrow$ mit gaußschen Kästchen

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2n} = \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}} H_{1n} \qquad (4.82)$$

- $\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j} \Rightarrow$ mit stokesscher Fläche

$$(\hat{t} \times \hat{n})(\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \hat{t} \cdot \underline{j}_F$$

$\underline{j}_F$ = Oberflächenstrom. Wenn 0:

$$H_{2t} = H_{1t}, \quad B_{2t} = \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}} B_{1t} \qquad (4.83)$$

< f) Randwertprobleme

- Zu lösen: $\operatorname{div} \underline{B} = 0$ (4.65), $\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j}$ (4.77)

i) $\mu = \text{const}$ in V : $\operatorname{rot} \underline{B} = \mu \mu_0 \underline{j}$ $\qquad$ (4.84)

- Problem wie im Vakuum, nur $\mu\mu_0$ statt μ_0
  Vgl. (4.51) mit Coulombeichung:

$$\Delta \underline{A} = -\mu \mu_0 \underline{j} \qquad (4.85)$$

ii) $\underline{j} = 0$, Randbedingungen auf ∂V:

- $\text{rot}\, \underline{H} \overset{(4.77)}{=} \underline{0}$. Definiere ein skalares Potenzial ϕ_m

mit $\underline{H} = -\nabla \phi_m$ (4.86)

- Mit $\text{div}\, \underline{B} = \mu\mu_0\, \text{div}\, \underline{H} = \underline{0}$ ist

$$\Delta \phi_m = 0 \qquad (4.87)$$

unter Randbedingungen zu lösen.

iii) $\underline{M}|_V \neq 0$, $\underline{j}|_V = 0$, z.B in Ferromagneten.

- $\text{rot}\, \underline{H} \overset{(4.77)}{=} \underline{0} \Rightarrow \underline{H} \overset{(4.86)}{=} -\nabla \phi_m$

$$0 = \text{div}\, \underline{B} \overset{(4.76)}{=} \mu_0\, \text{div}\, (\underline{H} + \underline{M})$$

$$\Rightarrow \Delta \phi_m = \text{div}\, \underline{M} \qquad (4.88)$$

- entspricht Poissongleichung der Elektrostatik.

5 Elektrodynamik

5.1 Maxwellgleichungen

a) Vorbemerkungen

- Dynamik koppelt die in der Statik separat behandelten Felder zum „Elektromagnetismus"

- Ampère: $\underline{j}$ erzeugt $\underline{B}$ und $\underline{H}$

  Faraday: Kann $\underline{B}$ ein $\underline{E}$ und (über Ohm) ein $\underline{j}$ erzeugen?

b) Faradaysches Induktionsgesetz

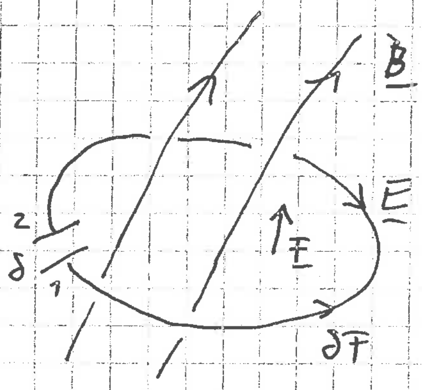
- Beobachtung: Zeitlich veränderlicher Fluss durch eine Fläche F

$$\phi = \int_F d\underline{f} \cdot \underline{B} \qquad (5.1)$$

induziert eine Spannung entlang δF

$$U_{ind}^{1\to 2} = - \int_{1\ \delta}^{2} d\underline{r} \cdot \underline{E}$$

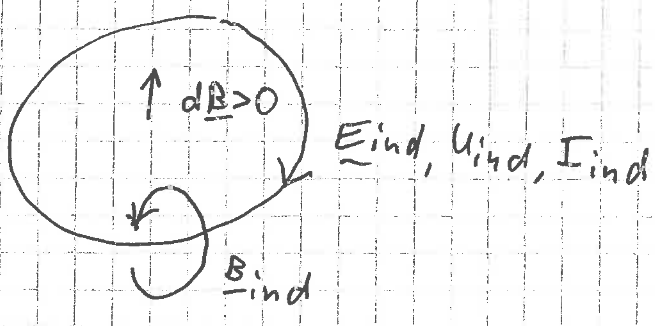
$$= + \oint_{\partial F} d\underline{r} \cdot \underline{E} \qquad (5.2)$$



- Es gilt: $U_{ind} = - \dot{\phi}$

  oder $$\oint_{\partial F} d\underline{r} \cdot \underline{E} = - \frac{d}{dt} \int d\underline{f} \cdot \underline{B} \qquad (5.3)$$

- Flusszunahme:



- Das induzierte elektrische Feld ist so gerichtet, dass es seiner Ursache entgegenwirkt (Lenzsche Regel oder Prinzip von Le Châtelier).

- Mit dem Stokeschen Satz folgt

$$\int_F d\underline{f}\,(\mathrm{rot}\,\underline{E} + \dot{\underline{B}}) = 0 \qquad \left\langle \dot{\underline{B}} = \frac{\partial}{\partial t} B \right\rangle$$

bzw.

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}} \tag{5.4}$$

„Faraday-Induktionsgesetz", modifiziert (2.53)

c) Die maxwellsche Ergänzung

- Das Ampèregesetz

$$\mathrm{rot}\,\underline{H} = j \tag{4.77}$$

ist bei nichtstationären Strömen unvereinbar mit der Ladungserhaltung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\,j = 0 \tag{4.4}$$

da $0 = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,H = \mathrm{div}\,j$ (4.5)

- Ansatz: „Maxwellsche Ergänzung"

$$\mathrm{rot}\,\underline{H} = j + j_0 \quad \text{(hypothetischer Zusatzstrom} \tag{5.5}$$

mit $\mathrm{div}\,j_0 \overset{(5.5)}{=} \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,H - \mathrm{div}\,j \overset{(4.4)}{=} \frac{\partial \varrho}{\partial t} \overset{(3.10)}{=} \mathrm{div}\,\frac{\partial D}{\partial t}$ (5.6)

also

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{H} = j + \dot{\underline{D}}} \tag{5.7}$$

$\dot{\underline{D}}$: „Verschiebungsstrom"

· Interpretation: Mit (4.75), (3.9) folgt:

$$\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{freie}}}{\underline{j}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polarisations}}}{\dot{\underline{P}}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Magnetisierungsstromdichte}}}{\mathrm{rot}\,\underline{M}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vakuumsverschiebungsstromdichte}}}{\varepsilon_0 \dot{\underline{E}}} \} \qquad (5.8)$$

d) Zusammenfassung der Maxwellgleichungen

· Partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung

· Homogen:

- Keine magn. Monopole: $\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$ (5.9)
- Faraday-Induktionsgesetz: $\mathrm{rot}\,\underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$ (5.10)

· Inhomogen:

- Coulomb-(Gauß-)Gesetz: $\mathrm{div}\,\underline{D} = \varrho$ (5.11)
- Ampère-Durchflutungsgesetz: $\mathrm{rot}\,H - \dot{D} = j$ (5.12)

· Materialgleichungen

$$\underline{B} = \mu_0(\underline{H} + \underline{M}) \overset{\text{linear}}{=} \mu_0 \underline{\underline{\mu}}\, \underline{H} \qquad (5.13)$$

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \overset{\text{linear}}{=} \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E} \qquad (5.14)$$

5.2 Elektromagnetische Potenziale

a) Ansatz

$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$ wird gelöst durch den Ansatz

$$\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A} \qquad (5.15) \text{ vgl. } (4.46)$$

$\underline{A}$: „Vektorpotenzial"

• In (5.10):

$$\mathrm{rot}\,(\underline{E} + \dot{\underline{A}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E} + \dot{\underline{A}} = -\nabla\phi(\underline{r},t)$$

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\nabla\phi(\underline{r},t) - \dot{\underline{A}}(\underline{r},t) \quad (5.16) \text{ vgl. } (2.15)$$

c) Eichtransformationen

• $\underline{B}$ bleibt unverändert bei Ersatz

$$\underline{A} \rightarrow \tilde{\underline{A}}(\underline{r},t) \overset{(4.49)}{=} \underline{A}(\underline{r},t) + \nabla\chi(\underline{r},t) \quad (5.17)$$

• Damit auch $\underline{E}$ unverändert bleibt, muss gleichzeitig ϕ ersetzt werden durch

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi}(\underline{r},t) = \phi(\underline{r},t) - \dot{\chi}(\underline{r},t) \quad (5.18)$$

• Setze Potenziale in die inhomogenen Gleichungen (dEh für den Vakuumfall) ein:

$$\mathrm{div}\,\underline{E} \overset{(5.11)}{=} \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{rot}\,\underline{B} \overset{(5.12)}{=} \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon \dot{\underline{E}} \quad (5.19)$$

$$-\Delta\phi - \mathrm{div}\,\dot{\underline{A}} \underset{(5.16)}{\overset{(5.11)}{=}} \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad (5.20)$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,A = \nabla(\nabla A) - \Delta \underline{A} \underset{(5.19)}{\overset{(5.15)}{=}} \mu_0 \underline{j} - \mu_0\varepsilon_0 \nabla\dot{\phi} - \mu_0\varepsilon_0 \ddot{\underline{A}} \quad (5.21)$$

• Zusammengefasst mit $\varepsilon_0\mu_0 \overset{(4.24)}{=} \frac{1}{c^2}$ und

$$\Box := -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta : \text{ d'Alembertoperator} \quad (5.22)$$

so folgt:

$$\Box \underline{A} - \nabla\left(\mathrm{div}\,\underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}\right) = -\mu_0 \underline{j} \quad (5.23)$$

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\underline{A} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad (5.24)$$

c) Eichungen

i) Coulombeichung

- Wähle $\operatorname{div} \underline{A} = 0$ (4.50)
- Folgt für ϕ die Poissongleichung der Elektrostatik (2.54) mit Lösung:

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\underline{r}' \frac{\varrho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (2.55)$$

- Folgt für $\underline{A}$ mit (5.23), (2.55) und Ladungserhaltung (4.4):

$$\Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j} - \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\underline{r}} \int d^3\underline{r} \frac{\operatorname{div} \underline{j}(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\frac{1}{c^2}\nabla\dot{\phi}} \qquad (5.25)$$

$+ \underline{j}_\ell$ nach Zerlegungssatz (4.42)

- Also:

$$\Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}_t(\underline{r},t) \qquad (5.26)$$

mit

$$\underline{j}_t = \frac{1}{4\pi} \nabla_{\underline{r}} \times \int d^3\underline{r} \frac{\operatorname{rot} \underline{j}(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (5.27)$$

- Coulombeichung = „transversale Eichung",
  nicht Lorentzinvariant

ii) Lorenzeichung

- Wähle $\operatorname{div} \underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$ (5.28)
- Führt zur vollständigen Entkoppelung der Differenzialgleichungen für Φ und alle Komponenten von $\underline{A}$:

$$\Box \underline{A}(\underline{r},t) = -\mu_0 \underline{j} \qquad (5.29)$$

$$\Box \Phi(\underline{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad (5.30)$$

19.5.