- Unabhängig vom Bezugssystem, Lorentzinvariant.

5.3. Energiebilanz

a) Leistungsdichte

- Vgl. 4.1 f) Arbeitsleistung an einer Ladung:

$$W = \int d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r})^{\leftarrow \text{Kraft}} = q \int d\underline{r} \cdot (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) =$$

$$= q \int dt \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{\underline{v}} \cdot (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) = q \int dt\, \underline{v} \cdot \underline{E} \qquad (5.31)$$

- Leistung: $\frac{dW}{dt} = q \cdot \underline{v} \cdot \underline{E}$ wie in (4.16)

$\underline{B}$ leistet keine Arbeit.

- Folgt gemäß (4.17) die „Leistungsdichte" $\underline{j} \cdot \underline{E}$.

- Umformung:

$$\underline{j} \cdot \underline{E} \overset{(5.12)}{\underset{\text{Ampère}}{=}} \underline{E} \cdot \operatorname{rot} \underline{H} - \underline{E} \cdot \dot{\underline{D}}$$

- Wegen $\operatorname{div}(\underline{E} \times \underline{H}) \overset{\text{Spatprodukt}}{=} \underline{H} \cdot \operatorname{rot} \underline{E} - \underline{E} \cdot \operatorname{rot} \underline{H} =$

$\overset{(5.10)}{\underset{\text{Faraday}}{=}} -\underline{H} \cdot \dot{\underline{B}} - \underline{E} \cdot \operatorname{rot} \underline{H}$ gilt:

$$\underline{j} \cdot \underline{E} = -\{ \underline{E} \cdot \dot{\underline{D}} + \underline{H} \cdot \dot{\underline{B}} + \operatorname{div}(\underline{E} \times \underline{H}) \} \qquad (5.32)$$

b) Poyntingsches Theorem

- Definiere die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes:

$$\underline{w}(\underline{r},t) = \frac{1}{2} \{ \underline{H}(\underline{r},t) \cdot \underline{B}(\underline{r},t) + \underline{E}(\underline{r},t) \cdot \underline{D}(\underline{r},t) \} \qquad (5.33)$$

vgl. (3.28)

- Für lineare homogene Medien gilt (vgl (3.28)):

$$\underline{H}\cdot\dot{\underline{B}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\underline{H}\cdot\underline{B})$$
$$\underline{E}\cdot\dot{\underline{D}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\underline{E}\cdot\underline{D}) \qquad (5.34)$$

- Definiere Poyntingvektor oder Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes

$$\underline{S}(\underline{r},t) = \underline{E}(\underline{r},t)\times\underline{H}(\underline{r},t) \qquad (5.35)$$

- Mit (5.32) folgt die Energiebilanz oder das poyntingsche Theorem:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\,\underline{S} = -\underline{j}\cdot\underline{E}} \qquad (5.36)$$

- <u>Interpretation:</u>

$$\int_V d^3\underline{r}\,\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dW_V^{(\mathrm{Feld})}}{dt} \;:\; \text{Feldenergie} \qquad (5.37)$$

$$\int_V d^3\underline{r}\,\underline{j}\cdot\underline{E} = \frac{dW_V^{(\mathrm{mech})}}{dt} \;:\; \text{Mechanische Arbeit oder Wärme} \qquad (5.38)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{W_V^{(\mathrm{mech})} + W_V^{(\mathrm{Feld})}\right\} = -\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{S} \qquad (5.39)$$

5.4. Impulsbilanz

a) Impulsübertrag des Feldes

$$\frac{d}{dt}\underline{P}_V^{(\mathrm{mech})} = \int d^3\underline{r}\,\rho(\underline{E}+\underline{v}\times\underline{B}) = \int d^3\underline{r}\,(\rho\underline{E}+\underline{j}\times\underline{B}) \qquad (5.40)$$

- Nutze die inhomogenen Maxwellgleichungen:

$$\rho\underline{E}+\underline{j}\times\underline{B} \overset{(5.5)}{\underset{(5.6)}{=}} \underline{E}(\nabla\cdot\underline{D}) + (\mathrm{rot}\,\underline{H})\times\underline{B} - \dot{\underline{D}}\times\underline{B} \qquad (5.41)$$

o.B. umgeformt

Tensorprodukt

$$\varrho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B} = \nabla \left\{ \underline{D} \otimes \underline{E} - \tfrac{1}{2} \underline{D} \cdot \underline{E} + \underline{B} \otimes \underline{H} - \tfrac{1}{2} \underline{B} \cdot \underline{H} \right\} \qquad (5.42)$$

• Definiere den Impuls des elektromagnetischen Feldes

$$P_V^{(\mathrm{Feld})} = \int_V d^3\underline{r} \; (\underline{D} \times \underline{B}) \qquad (5.43)$$

sowie den maxwellschen Spannungstensor

$$\underline{\underline{T}} = \underline{D} \otimes \underline{E} - \tfrac{1}{2} (\underline{D} \cdot \underline{E}) \, \underline{\underline{1}} + \underline{B} \otimes \underline{H} - \tfrac{1}{2} (\underline{B} \cdot \underline{H}) \, \underline{\underline{1}} \qquad (5.44)$$

so gilt:

$$\frac{d}{dt} \left\{ P_V^{(\mathrm{Mech})} + P_V^{(\mathrm{Feld})} \right\} = \int_V d^3\underline{r} \; \mathrm{div}\, \underline{\underline{T}} = \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{\underline{T}} \qquad (5.45)$$

· Interpretation

$\underline{f} \cdot \underline{\underline{T}}$ = Kraft des elektromagnetischen Feldes auf Fläche f „Strahlungsdruck"

– Impulsdichte des em-Feldes im Vakuum:

$$\underline{g} = \underline{D} \times \underline{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \, \underline{E} \times \underline{H} \overset{(5.35)}{\underset{(4.24)}{=}} \frac{1}{c^2} \underline{S} \qquad (5.46)$$

5.5. Ergänzung zum faradayschen Induktionsgesetz

· Gilt $U_{ind} \overset{(5.3)}{=} -\dot{\phi} \iff \mathrm{rot}\, \underline{E} + \dot{\underline{B}} \overset{(5.4)}{=} 0$, selbst wenn $\phi = \int_{F(t)} d\underline{f} \cdot \underline{B}$ mit beweglicher Fläche $F(t)$?

· Ja, aber mit anderer Interpretation von U_{ind}!

$$\dot{\Phi} \underset{(5.8)}{\overset{\text{G.B.}}{=}} \int_{F(t)} d\underline{f} \cdot \dot{\underline{B}} + \int_{\partial F(t)} d\underline{r} \cdot (\underline{B} \times \underline{v}) =$$

Becker-Bürger S. 27 (1.86)

$$\overset{(5.4)}{=} -\int_{F(t)} d\underline{f}\, \mathrm{rot}\, \underline{E} - \int_{\partial F(t)} d\underline{r}\, (\underline{v} \times \underline{B}) \overset{\text{Stokes}}{=} - \int_{\partial F(t)} d\underline{r} \cdot (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) =$$

$$= - \int_{\partial F(t)} d\underline{r} \cdot \frac{\underline{k}(\underline{r},t)}{\varrho(\underline{r},t)} = -U_{ind}\,! \qquad (5.47)$$

- $\underline{k}$: Lorentzkraftdichte

- Elektromotorische Kraft allgemeiner definiert

- Wenn $\dot{\underline{B}} = \underline{0}$, dann $\underline{E} = 0$, EM-Kraft nur durch Bewegung der Ladungen im Magnetfeld ausgelöst!

6 Wellenausbreitung und Strahlung

6.1. Einfache Lösungen der homogenen Wellengleichung

- Voraussetzungen: Elektromagnetische Felder in ungeladenem Isolator, z.B. Vakuum, lineares homogenes Medium:

$$\varrho = 0, \quad j = 0, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \qquad (6.1)$$

$$\underline{B} = \mu\mu_0 \underline{H}, \quad \underline{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \underline{E} \qquad (6.2)$$

a) Maxwellgleichungen

$$\mathrm{div}\,\underline{E} = 0, \quad \mathrm{div}\,\underline{B} = 0 \qquad (6.3a)$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}, \quad \mathrm{rot}\,\underline{B} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\,\dot{\underline{E}} \qquad (6.3b)$$

- Gekoppeltes System von partiellen, linearen, homogenen Differenzialgleichungen erster Ordnung

- Aus rot (6.3b) folgt:

$$\nabla\times(\nabla\times\underline{E}) = \nabla\underbrace{(\nabla\cdot\underline{E})}_{=0} - \Delta \underline{E} = -\mathrm{rot}\,\dot{\underline{B}} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\,\ddot{\underline{E}} \qquad (6.4a)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\underline{B}) = \nabla\overbrace{(\nabla\cdot\underline{B})} - \Delta B = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\,\mathrm{rot}\,\dot{\underline{E}} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\,\ddot{\underline{B}} \qquad (6.4b)$$

- Damit erfüllt jede Komponente von $\underline{E}$ und $\underline{B}$ die homogene Wellengleichung

$$\Box\,\psi = 0 \qquad (6.5)$$

mit

$$\Box = -\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \quad \text{(d'Alembert)} \qquad (6.6)$$

und (6.7): $u = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \dfrac{c}{n}$ Lichtgeschwindigkeit im Medium mit $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ und $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ (6.8)

„Brechungsindex"

NB! Oft $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ und komplex, dann $n, u \in \mathbb{C}$

OB: (6.5) gilt auch für jede Komponente von $\underline{A}$ (in beiden Eichungen) und für ϕ (in Lorentzeichung)

b) Ebene Wellen   i) Allgemeine Lösung

- Ansatz: $\psi(\underline{r},t) = f_-(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t) + f_+(\underline{k}\cdot\underline{r} + \omega t)$ (6.9)

- f_-, f_+: hinreichend oft differenzierbare, sonst beliebige Funktionen der Phase

$$\varphi_\mp(\underline{r},t) = \underline{k}\cdot\underline{r} \mp \omega t \quad (6.10)$$

mit oBdA $\omega \geq 0$. Folgt:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= k^2 \{ f_-''(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t) + f_+''(\underline{k}\cdot\underline{r} + \omega t) \} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \omega^2 \{ f_-''(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t) + f_+''(\underline{k}\cdot\underline{r} + \omega t) \} \end{aligned} \quad (6.11)$$

- (6.9) ist Lösung, wenn die „Dispersionsrelation"

$$\omega = uk \quad (6.12)$$

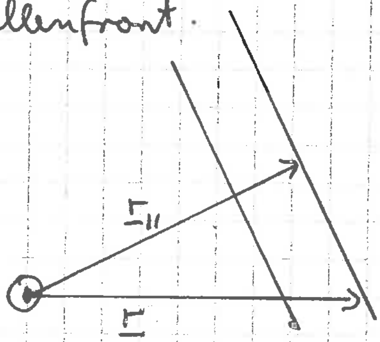
erfüllt ist und $u =$ const, reell. Wenn $u = u(\omega)$ dann zerfließen Wellenpakete, wenn $u \in \mathbb{C}$, dann entweder ω oder k oder beide komplex.

- Betrachte die Lösung für f_-: $\varphi_-(\underline{r},t) = \text{const} \Rightarrow f_- = \text{const}$.

- $t = t_0$ Momentaufnahme: $\varphi_-(\underline{r},t_0) = \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t$

- Flächen gleicher Phase sind gegeben durch $\underline{k}\cdot\underline{r} = \text{const}$:

„Wellenfront".



(6.13)

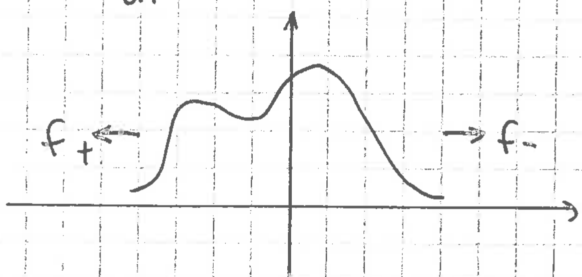
- Bewegung der Wellenfront:

$$\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t = k r_{\parallel} - \omega t =: \varphi_-^{(0)}$$

$$\Rightarrow \quad r_{\parallel} = \frac{\underline{r}\cdot\underline{k}}{k} = \frac{\varphi_-^{(0)}}{k} + \frac{\omega}{k} t \qquad (6.14)$$

- Bewegt sich mit der „Phasengeschwindigkeit"

$$\frac{dr_{\parallel}}{dt} \overset{(6.14)}{=} \frac{\omega}{k} = u \qquad (6.15)$$



„$\underline{k}$: „Ausbreitungsvektor"

22.5

ii) Ebene Wellen

- Sind Real- und Imaginärteile der periodischen Funktionen

$$f(\underline{r},t) = A\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} \qquad (6.16)$$