- Periodische Abfolge von Wellenfronten, Abstände

$$\Delta \underline{r}_n \cdot \underline{k} = 2\pi n = \Delta r_{n\parallel} k \,, n \in \mathbb{Z}$$

- Wellenlänge : $\lambda := \Delta r_{1\parallel} = \frac{2\pi}{k}$ (6.17)

- $\underline{k}$ Wellenvektor. Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = Zahl der Wellenfronten im Intervall 2π.

- $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ „Periode", $\nu = \frac{1}{\tau}$ = Schwingungen pro Zeiteinheit.

- ν : „Frequenz", $\omega = 2\pi\nu$ = „Kreisfrequenz"

- $u \overset{(6.15)}{=} \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{\tau}$ (6.18)

iii) Monochromatische ebene elektromagnetische Wellen

- Ansätze:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} \qquad (6.19)$$

- Koppelung durch Maxwellgleichungen:

$$\operatorname{rot} \underline{E} \overset{(6.3b)}{=} -\dot{\underline{B}}$$

$$\Rightarrow i(\underline{k} \times \underline{E}_0)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} = i\bar{\omega}\, \underline{B}_0 \, e^{i(\bar{\underline{k}}\cdot\underline{r} - \bar{\omega} t)}$$

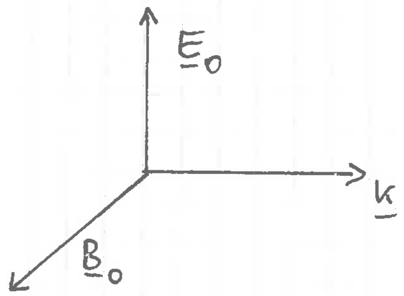
- Gültig für alle Raumzeitpunkte

$$\Rightarrow \omega = \bar{\omega} \,, \underline{k} = \bar{\underline{k}} \,, \underline{k} \times \underline{E}_0 = \omega \underline{B}_0 \qquad (6.20)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{E} \overset{(6.3a)}{=} 0 \quad &\Rightarrow \quad \underline{k}\cdot\underline{E}_0 = 0 \\ \operatorname{div} \underline{B} \overset{(6.3b)}{=} 0 \quad &\Rightarrow \quad \underline{k}\cdot\underline{B}_0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6.21)$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{B} \overset{(6.3b)}{=} \frac{1}{u^2}\dot{\underline{E}} \quad \Rightarrow \quad \underline{k}\times\underline{B} = -\frac{\omega}{u^2}\underline{E}_0 \qquad (6.22a)$$

- Folgt: $\underline{k}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$ bilden ein positiv orientiertes orthogonales Dreibein mit $E_0 = u B_0$ (6.22b)



- „Transversale Wellen": Setze $\underline{k} = k\hat{e}_z$, dann ist

$$\underline{E} = (E_{0x}\hat{e}_x + E_{0y}\hat{e}_y)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$\underline{B} = \frac{1}{u}(-E_{0y}\hat{e}_x + E_{0x}\hat{e}_y)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} \qquad (6.23)$$

iv) Polarisation

- Betrachte (6.23) nur für das E-Feld

  I.A. sind E_{0x}, E_{0y} komplex:

$$E_{0x} = |E_{0x}|\, e^{i\varphi}, \quad E_{0y} = |E_{0y}|\, e^{i(\varphi+\delta)} \qquad (6.24)$$

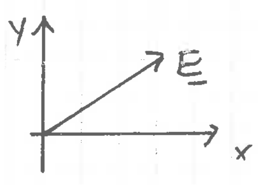
- Folgt: $\underline{E} = E_x\hat{e}_x + E_y\hat{e}_y$ mit

$$\mathrm{Re}\, E_x = |E_{0x}| \cos(kz - \omega t + \varphi)$$

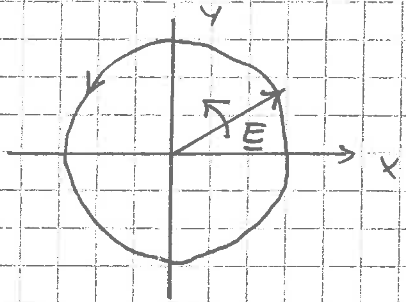
$$\mathrm{Re}\, E_y = |E_{0y}| \cos(kz - \omega t + \varphi + \delta) \qquad (6.25)$$

- Fälle

  – $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$: lineare Polarisation



– $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$, $|E_{0x}| = |E_{0y}|$: rechts zirkular polarisiert; links



– δ beliebig, außer 0 und $\pm\pi$ oder/und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$
elliptisch polarisiert.

d) Energietransport in Wellenfeldern

- Wegen des Superpositionsprinzips ist die komplexe Schreibweise (6.19) ebener Wellen und Nutzung des Real- und Imaginärteils als reelle Lösung möglich.

- Energiegrößen w (5.33), $\underline{S}$ (5.35), $\underline{I}$ (5.44), $\underline{g}_{Feld}$ (5.46) sind jedoch nichtlineare Ausdrücke (Produkte)

- Leicht darstellbar: Zeitmittel harmonischer Felder:

$$\underline{a}(\underline{r},t) = \underline{a}_0(\underline{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$\underline{b}(\underline{r},t) = \underline{b}_0(\underline{r})\, e^{-i\omega t} \qquad (6.26)$$

- Folgt:

$$(\mathrm{Re}\,\underline{a})\cdot(\mathrm{Re}\,\underline{b}) = \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{a}^*)\cdot\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{b}^*) =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\underline{a}_0\cdot\underline{b}_0\, e^{-2i\omega t} + \underline{a}_0^*\cdot\underline{b}_0^*\, e^{+2i\omega t} + \underline{a}_0\cdot\underline{b}_0^* + \underline{a}_0^*\cdot\underline{b}_0\right\} \qquad (6.27)$$

- Zeitmittel: $$\langle e^{\pm 2i\omega t}\rangle = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} dt'\, e^{\pm 2i\omega t'} =$$

$$= \frac{\mp i}{2\omega\tau}\, e^{\pm 2i\omega t'}\Big|_t^{t+\tau} = 0 \qquad (6.28)$$

- Also: $\langle (\mathrm{Re}\,\underline{a})(\mathrm{Re}\,\underline{b}) \rangle = \frac{1}{4}(\underline{a}_0 \cdot \underline{b}_0^* + \underline{a}_0^* \underline{b}_0) =$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\underline{a}_0 \cdot \underline{b}_0^*) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\underline{a}_0^* \cdot \underline{b}_0) \qquad (6.29)$$

- Bei ebenen elektromagnetischen Wellen kürzt sich auch $e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$ heraus. Folgt für (6.19):

$$\langle w \rangle \overset{(6.29)}{=} \mathrm{Re}\,(\underline{H}_0 \cdot \underline{B}_0^* + \underline{E}_0 \cdot \underline{D}_0^*) \underset{(6.22b)}{\overset{(6.7)}{=}}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 |\underline{E}_0|^2 = \frac{1}{2\mu\mu_0} |\underline{B}_0|^2 \qquad (6.30)$$

- Poyntingvektor:

$$\bar{S}(\underline{r},t) \underset{(6.29)\,(6.30)}{\overset{(5.35)\,(6.20)}{=}} u \langle w \rangle (\underline{r},t)\,\hat{k} \qquad (6.31)$$

6.2. Allgemeinere Lösung der homogenen Wellengleichung

- Erinnerung

a) Fouriertransformation

- Dch in 1 Dimension:

- Die ebenen Wellen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} = \langle x | k \rangle$ bilden ein vollständiges ONS. Denn es gilt:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} \qquad (6.32)$$

i) Orthogonalität

$$\langle k' | k \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik'x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \overset{(6.32)}{=} \delta(k-k') \qquad (6.33)$$

ii) Vollständigkeit

$$\langle x | \int dk\, |k\rangle \langle k | y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} e^{-iky} \overset{(6.32)}{=} \delta(x-y) \qquad (6.34)$$

- Entwicklung von Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, f(k)\, e^{ikx} \qquad (6.35a)$$

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad (6.35b)$$

b) Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung

- Kann als Superposition von ebenen Wellen dargestellt werden:

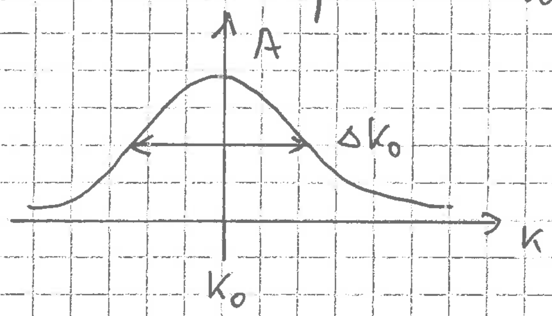
$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \underset{\uparrow \text{ Gewichtsfunktion}}{A(k)}\, e^{ikx - i\omega(k)t} \qquad (6.36)$$

- Vorgegeben: Anfangswerte $\Psi(x,0)$ und $\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,0)$
- Folgt:

$$A(k) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \left\{ \Psi(x,0) + \frac{i}{\omega(k)} \frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,0) \right\} dx \qquad (6.37)$$

c) Gruppengeschwindigkeit

- Wellen sind idR nicht monochromatisch, sondern Wellenzahl- oder Frequenzbündel:



(6.38)

- IdR ist die DK ε frequenzabhängig

D.h.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\omega) \qquad (6.39)$$

und somit $u \overset{(6.7)}{=} \left\{ \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \right\}^{-1/2} = u(\omega) \qquad (6.40)$

bzw. $\omega \overset{(6.12)}{=} u(\omega)\,k$ oder $k = \frac{\omega}{u(\omega)} = k(\omega)$

oder $\omega = \omega(k)$ (6.41)

mit $\omega(-k) = \omega(k)$

- Entwickle $\omega(k)$ in (6.41) um den Schwerpunkt k_0:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\frac{d\omega}{dk}(k_0) + \dots =$$

$$=: \omega(k_0) + (k-k_0)\,v_g + \dots \qquad (6.42)$$

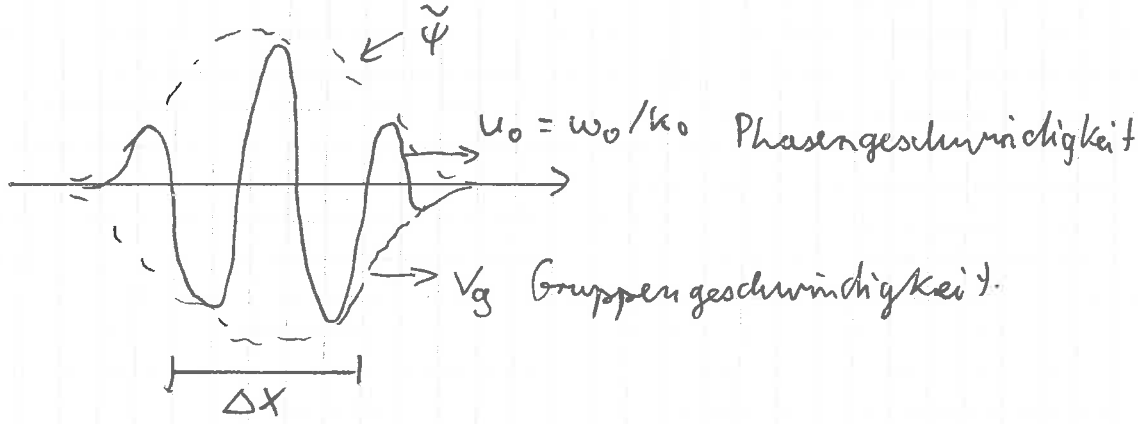
- Folgt in (6.36) mit $k-k_0 =: q$ d.h. $k = k_0 + q$:

$$\psi(x,t) = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, A(k_0+q)\, e^{iq(x - v_g t)} =$$

$$= e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}\, \tilde{\psi}(x - v_g t) \qquad (6.43)$$

- Ergebnis ist ein Wellenpaket

(6.44)



- NB! $\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$ (6.45)

- „Dispersion": Wenn $u_0 \neq v_g$

⟨ - Bsp quantenmechanisches Teilchen

$E = \frac{p^2}{2m}$, de Broglie $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ $\Rightarrow$ $\omega = \frac{k^2}{2m}$, $\omega_0 = \frac{k_0^2}{2m}$, $v_g = \frac{k_0}{m}$ ⟩

6.3. Lösung der inhomogenen Wellengleichung

a) Greensche Funktion

· Inhomogene Wellengleichung in Lorenzeichung:

$$\Box \underline{A}(\underline{r},t) = -\mu\mu_0\, \underline{j}(\underline{r},t) \qquad (5.29)$$

$$\Box \varphi(\underline{r},t) = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0}(\underline{r},t) \qquad (5.30)$$

· Allgemein:

nicht Leitfähigkeit

$$\Box \psi(\underline{r},t) = -\sigma(\underline{r},t) \text{ Quellterm} \qquad (6.41)$$

· Greensche Funktion ist Lösung für „Punkt"ereignis als Quellterm:

$$\Box_{\underline{r},t}\, G(\underline{r}-\underline{r}',t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t') \qquad (6.42)$$

· Damit ist die vollständige Lösung, vgl. (2.96)

$$\psi(\underline{r},t) = \int d^3\underline{r}' \int dt'\; G(\underline{r}-\underline{r}',t-t')\,\sigma(\underline{r}',t') \qquad (6.43)$$

b) Fouriertransformation

· Setze

$$G(\underline{r}-\underline{r}',t-t') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3\underline{k}\, d\omega\; G(\underline{k},\omega)\, e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')}\, e^{-i\omega(t-t')} \qquad (6.44)$$

$$\delta(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\underline{k}\; e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')} \qquad (6.45)$$

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\; e^{-i\omega(t-t')}$$

in (6.42) ein, so folgt:

$$\int d^3\underline{k}\int d\omega\; e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')}\, e^{-i\omega(t-t')} \left\{ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{u^2}\right) G(\underline{k},\omega) + \frac{1}{(2\pi)^2} \right\} = 0$$

$$G(\underline{k},\omega) = \frac{u^2}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\,, \quad \omega_0 := uk \qquad (6.46)$$

$$\Rightarrow G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \underset{(6.46)}{\overset{(6.44)}{=}} \frac{u^2}{(2\pi)^4}\int d^3\underline{k}\int d\omega\, \frac{e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')}\, e^{-i\omega(t-t')}}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad (6.47)$$

c) Auswertung durch Komplexe Integration

- Details siehe Nolting Kapitel 4.5

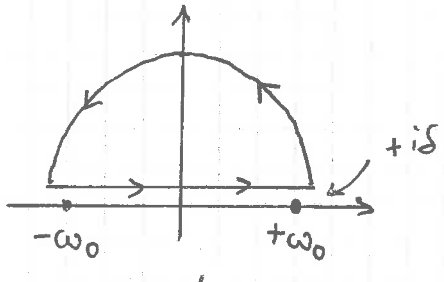
- Wegen

$$\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} = \frac{1}{2\omega_0}\left\{\frac{1}{\omega+\omega_0} - \frac{1}{\omega-\omega_0}\right\} \qquad (6.48)$$

hat der Integrand zwei Pole erster Ordnung, bei $\omega = \pm\omega_0$

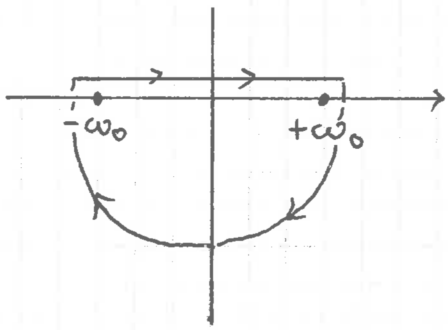
- Kausalität: Störung bei $\underline{r}$ zur Zeit t, von $\underline{r}'$ bei t' erzeugt: deshalb $G(\underline{r},t)$ nur für $t-t' > 0$ von Null verschieden.

- Wahl des Integrationswegs: infinitesimale Verschiebung in obere Halbebene



$t<t'$

$t>t'$ Kausaler Fall



Kein Residuum

Kein Pol umschlossen

Integral = 0

$$\underset{\pm\omega_0}{\mathrm{Res}} = \mp\frac{1}{2\omega_0}\, e^{\mp i\omega_0(t-t')} \qquad (6.50)$$

- Benutze Residuensatz:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\, f(z) = \sum_{i=1}^{N} \underset{z_i}{\mathrm{Res}}\, f(z)\,, \quad \underset{z_i}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \lim_{z\to z_i}(z-z_i)f(z) \qquad (6.49)$$

• Folgt mit (6.47), $\omega_0 \overset{(6.46)}{=} uk$

$$G_{ret}(\underline{r}-\underline{r}',t-t') = -\frac{iu}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3\underline{k}}{k}\, e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')}\cdot$$

$$\cdot\left\{ e^{iku(t-t')} - e^{-iku(t-t')}\right\}\cdot \Theta(t-t') \qquad (6.51)$$

„Retardierte greensche Funktion"

• Folgt (wegen $|\underline{r}-\underline{r}'|>0$ und $t-t'>0$):

$$G_{ret}(\underline{r}-\underline{r}',t-t') = \frac{u}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\Theta(t-t')\,\delta(|\underline{r}-\underline{r}'|-u(t-t')) \qquad (6.52)$$

bzw. $$G_{ret}(\underline{r}-\underline{r}',t-t') = \Theta(t-t')\frac{\delta(t'-t_{ret})}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (6.53)$$

mit der retardierten Zeit

$$(6.54) \quad t_{ret} = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{u} \leftarrow \text{Signalzeit von } \underline{r}' \text{ nach } \underline{r}$$

• Folgt für die Lösung (6.43) $\left(t-t_{ret} = \frac{1}{u}|\underline{r}-\underline{r}'|>0\right)$:

$$\Psi(\underline{r},t) = \int d^3\underline{r}'\int dt'\,\Theta(t-t')\frac{\delta(t'-t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\zeta(\underline{r}',t') =$$

$$= \int d^3\underline{r}'\,\frac{-\zeta(\underline{r}',t_{ret})}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (6.54)$$

2.6.15

• Für die Potenziale folgt mit (5.29) und (5.30):

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int d^3\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r}',t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (6.55)$$

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int d^3\underline{r}'\,\frac{\underline{j}(\underline{r}',t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (6.56)$$

• avancierte Greensche Funktion: Zukunft beeinflusst Gegenwart

$$t_{av} = t + \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{u}$$