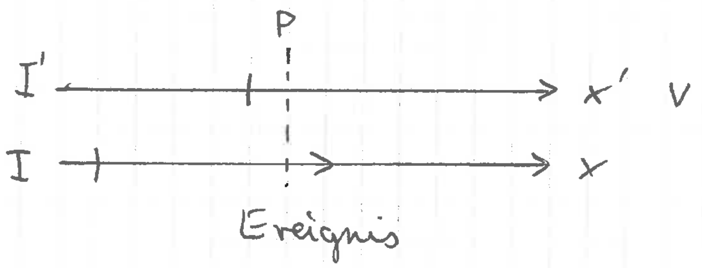
7. Zur speziellen Relativitätstheorie

7.1. Relativitätsprinzip und Zeitbegriff

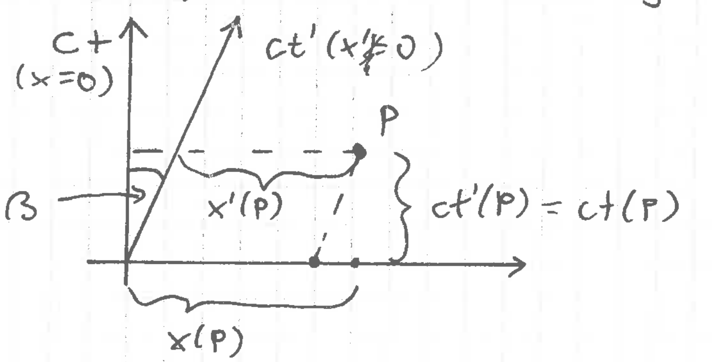
a) Newtonsche Zeit

„Die absolute, wahre und mathematische Zeit fließt aus sich heraus gleichförmig, ohne Bezug zu etwas Äußerem"

- Folge: Galileitransformationen zwischen Inertialsystemen I, I' lässt Gesetze der Mechanik invariant:



$$\left.\begin{aligned} x'(P) &= x(P) - \beta c t(P) \qquad \beta = \frac{v}{c} \\ ct'(P) &= ct(P) \end{aligned}\right\} \quad (7.1)$$



(7.2)

- Folge: Additionstheorem der Geschwindigkeiten:

- In I bewegter Gegenstand mit $u = \frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx'}{dt} =: w \overset{(7.1)}{=} \frac{dx}{dt} - \beta c = u - v \,, \quad u = w + v \quad (7.3)$$

b) Einsteins Relativitätsprinzip

- In allen Inertialsystemen haben die Gesetze der Physik die gleiche Form.

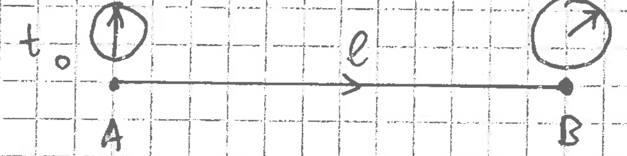
- Aus das Coulombgesetz (mit ε_0) und das Ampèregesetz (mit μ_0). Folge: Elektromagnetische Wellen bewegen sich im Vakuum mit universeller Lichtgeschwindigkeit $c = \{\varepsilon_0 \mu_0\}^{-1/2}$ (Michelson-Morley)

- Additionstheorem: Lichtstrahl in I mit c hat in I' die Phasengeschwindigkeit $c' = c - v$: Widerspruch!

c) Einsteins Lösung

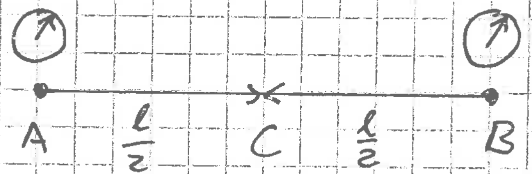
- „Zeit geht in I' anders" (langsamer)

- Vorschrift für Uhrensynchronisation:



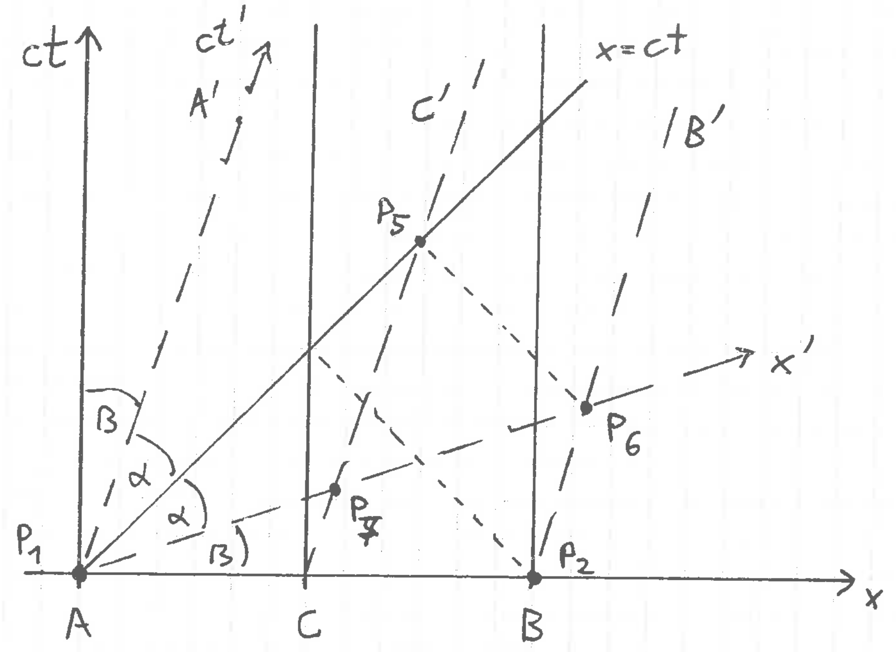
$t_0 + \Delta t = t_0 + \frac{\ell}{c}$

- Gleichzeitigkeit:



- Ereignisse geschehen bei A und B „gleichzeitig", wenn Lichtsignale bei C gleichzeitig eintreffen.

d) Zug-Bahndamm-Gedankenexperiment



$ct(P_1) = ct(P_2)$: P_1 gleichzeitig zu P_2 in I

$ct'(P_2) < ct'(P_1)$: P_2 vor P_1 in I'

$0 = ct'(P_1) = ct'(P_6)$: P_1 gleichzeitig zu P_6 in I'

ct-Achse: Punkte mit $x=0$ (Parallelen: $x \neq 0$)

x-Achse: Punkte mit $ct=0$ (Parallelen: $ct \neq 0$)

ct'-Achse: Punkte mit $x'=0$ (Zugende, Parallelen $ct' \neq 0$)

Winkel gleich β wegen Thales Kreis: $|P_1P_7| = |P_7P_6| = |P_7P_5|$

$$x' = \gamma(x - \beta ct); \quad x' = 0 : \quad x = \beta ct \qquad (7.4)$$

- Symmetrisch dazu:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x); \quad ct' = 0 : \quad ct = \beta x \qquad (7.5) \qquad \gamma ?$$

e) Invarianz des Intervalls

- Für ein Lichtsignal gilt nach dem Relativitätsprinzip

$x = ct$ und $x' = ct'$ d.h.

$$-c^2t^2+x^2 = -c^2t'^2+x'^2 \qquad (7.6)$$

· Mit (7.5), (7.4)

$$-c^2t'^2+x'^2 = -\gamma^2(ct-\beta x)^2+\gamma^2(x-\beta ct)^2 =$$

$$= \gamma^2\{-c^2t^2+\cancel{2\beta xct}-\beta^2x^2+x^2-\cancel{2\beta ctx}+\beta^2c^2t^2\}$$

$$= \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1}(-c^2t^2+x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (7.7)$$

f) Eigenzeit einer bewegten Uhr

· Raumzeitintervall zwischen P_2 und P_1 auf der Weltlinie einer Uhr:

$$\Delta s^2 = \underbrace{-c^2\Delta t^2+\Delta x^2}_{\text{Labor}} = \underbrace{-c^2\Delta t'^2}_{\text{Uhr } x'=0,\ \Delta x'=0} =: -c^2\Delta\tau^2 \qquad (7.8)$$

$$\Delta\tau^2 = -\frac{1}{c^2}\Delta s^2 = \Delta t^2\left\{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\right\} = \Delta t^2\{1-\beta^2(t)\} \qquad (7.9)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta t} \overset{(7.9)}{=} \sqrt{1-\beta^2(t)} = \frac{1}{\gamma(t)} \qquad (7.10)$$

g) Anwendungen

· Gradient

$$\partial_\alpha := \left[\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] \qquad \partial^\alpha := \left[-\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] \qquad (7.11)$$

· Divergenz: $\partial_\alpha u^\alpha = \frac{1}{c}\frac{\partial u^0}{\partial t} + \frac{\partial u^i}{\partial x^i}$ ← Lorentzskalar $\qquad (7.12)$

· D'Alembert: $\partial^\alpha\partial_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x^{02}} + \Delta = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} + \Delta = \Box \qquad (7.13)$

7. 2. Relativistische Elektrodynamik

a) Feldtensoren (im Gaußschen Maßsystem)

Faradaytensor

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}\underline{E}^t \\ \frac{1}{c}\underline{E} & {}^*\underline{\underline{B}} \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Maxwelltensor

$${}^*F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{B}^t \\ -\underline{B}^t & \frac{1}{c}{}^*\underline{\underline{E}} \end{pmatrix} \qquad \text{„}{}^*F = \varepsilon F\text{"} \quad (7.15)$$

b) Homogene Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot {}^*F = 0 \quad (7.16)$$

c) Inhomogene Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot F = \mu_0 J \quad (7.17)$$

Vierervektor

$$J^\mu = \begin{pmatrix} c\varrho \\ \underline{j} \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

d) Ladungserhaltung

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (7.19)$$

e) Vektorpotenzial

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ \underline{A} \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

f) Eichung (Lorenz)

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (7.21)$$

g) Wellengleichung

$$\Box A^\alpha = -\mu_0 J^\alpha \quad (7.22)$$

h) Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu}_{em} = \begin{pmatrix} w & c\underline{g}^t \\ c\underline{g} & -\underline{\underline{T}}_{em} \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

7.3. Relativistische Mechanik

a) Impuls

Vierergeschwindigkeit $u^\alpha = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \underline{v}\gamma \end{pmatrix} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}$ (7.24)

Viererimpuls $p = m\,u$

$$p^\alpha = \begin{pmatrix} E/c \\ \underline{p} \end{pmatrix} \qquad (7.25)$$

Energie $E = m_r c^2 = \sqrt{\underline{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ (7.26

b) Kraft

$$K = \frac{dp}{d\tau} \qquad K^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma W/c \\ \gamma \underline{F} \end{pmatrix}$$ W Leistung (7.27)

7.5. Lorentzkraft

$$K = q \cdot F \cdot u \qquad K^\alpha = q\, F^\alpha{}_\beta\, u^\beta = \gamma q \begin{pmatrix} \underline{E} \cdot \underline{v}/c \\ \underline{E} + \underline{v} \times \underline{B} \end{pmatrix} \qquad (7.28)$$

- Dynamik eines geladenen Teilchens

$$\frac{dp}{d\tau} = q F u \qquad (7.29)$$

- Lorentzkraftdichte

$$\nabla \cdot T_{em} + K = 0 \qquad (7.30)$$

Nachtrag zu 7.2 g)

- Inneres Produkt zweier Vierervektoren

$$u \cdot v := u^\alpha v_\alpha = u^\alpha \eta_{\alpha\beta} v^\beta =: u_\beta v^\beta \qquad (7.31)$$

mit $\eta = \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (7.32)