$$\langle p(s,\underline{k};n) \overset{(8.20/22)}{=} e^{-\hbar\omega(s,\underline{k})n/k_BT}\left\{1-e^{-\hbar\omega(s,\underline{k})/k_BT}\right\} \quad (8.75)\rangle$$

Besetzung f. Teilsystem

$$\ln Z = \sum_{s,\underline{k}}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega(s,\underline{k})}{k_BT} - \ln\left[1-e^{-\hbar\omega(s,\underline{k})/k_BT}\right]\right\} =$$

$$= -\int_0^{\omega_D} d\omega\, D(\omega)\left\{\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{kT} + \ln\left(1-e^{-\hbar\omega/k_BT}\right)\right\} \quad (8.76)$$

17

e) <u>Spezifische Wärme</u>

$$U \overset{(8.14)}{=} k_BT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z =$$

$$= \int_0^{\omega_D} d\omega\, D(\omega)\left\{\frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega\, e^{-\hbar\omega/k_BT}}{1-e^{-\hbar\omega/k_BT}}\right\} \quad (8.77)$$

$$C_V \overset{\nu=N_L}{=} \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\hbar^2}{k_BT^2}\int_0^{\omega_D} d\omega\, D(\omega)\frac{\omega^2 e^{\hbar\omega/k_BT}}{\left(e^{\hbar\omega/k_BT}-1\right)^2} \quad (8.78)$$

- Mit Substitution $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$, Bezeichnung $x_D := \frac{\hbar\omega}{k_BT} = \frac{\Theta}{T}$

erhält man:

$$\boxed{c_V \overset{(8.72)}{=} \frac{9\overbrace{N_Lk_B}^{NR}}{x_D^3}\int_0^{x_D} dx\,\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}} \quad (8.79)$$

- Grenzfall $T\to\infty$: $\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2} \xrightarrow{x\to 0} 1$

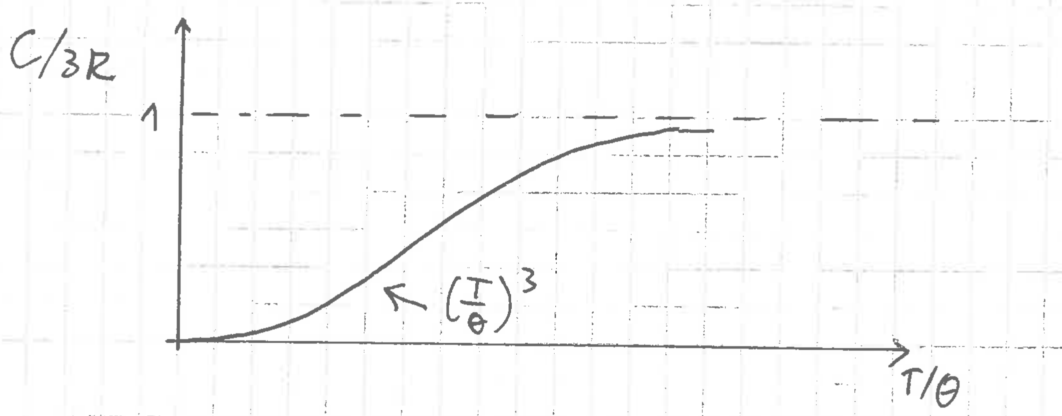
$$\Rightarrow \boxed{c_V = 3R} \quad (8.80)$$

Gleichverteilungssatz!

- Grenzfall $T\to 0$: $x_D\to\infty$

$$\boxed{c_V = \frac{12}{5}\pi^4R\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \propto T^3} \quad (8.81)$$

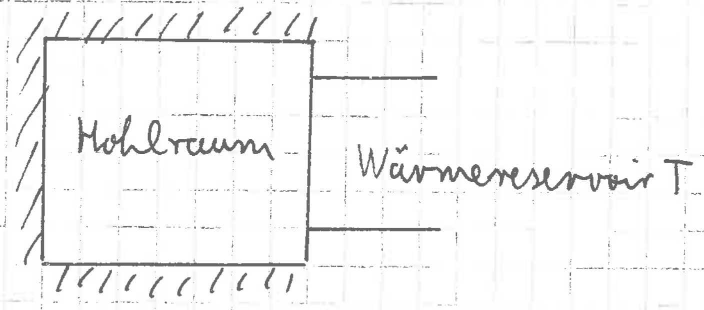
· Verhalten:



8.8. Elektromagnetische Strahlung

a) Modell

Perfekt leitende Wände $\phi = \text{const}$.
$\nabla\phi = -E = 0$
Knoten



· Moden: Elektromagnetische Wellen mit Wellenvektor $\underline{k}$, Frequenz $\omega(\underline{k}) = c|\underline{k}| = ck$, transversal $(s = 1,2)$ bzw. zirkular polarisiert $(s = +,-)$

· Keine kürzeste Wellenlänge, wie im Festkörper, keine obere Abschneidefrequenz, $\omega_D \to \infty$. Exakte Dispersionsrelation $\omega = ck$

· Zustandsdichte:

$$\text{Debye } (8.70) \times \frac{2}{3} \quad \langle \text{wg. Polarisation} \rangle$$

$$D(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3}\,\omega^2 \qquad (8.82)$$

b) Strahlungsenergie

· (8.77) ohne divergierende Nullpunktenergie (Vakuum)

78

$$U = \int_0^\infty d\omega\, D(\omega) \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1} \overset{(8.82)}{=} V \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\omega\, \omega^3}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1} \overset{x=\frac{\hbar\omega}{k_BT}}{=}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{(k_BT)^4}{\hbar^3} \underbrace{\int_0^\infty \frac{dx\, x^3}{e^x - 1}}_{\pi^4/15} = \frac{V\pi^2}{15\hbar^3 c^3} (k_BT)^4 \qquad (8.83)$$

$$\boxed{\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3} (k_BT)^4} \qquad (8.84)$$

„Stefan-Boltzmann-Gesetz" $\quad \frac{U}{V} \propto T^4$

c) Spektraldichte

· Definition: $\frac{U}{V} =: \int_0^\infty d\omega\, u(\omega) \quad (8.85)$

$u(\omega)$: Energiedichte je Frequenzintervall

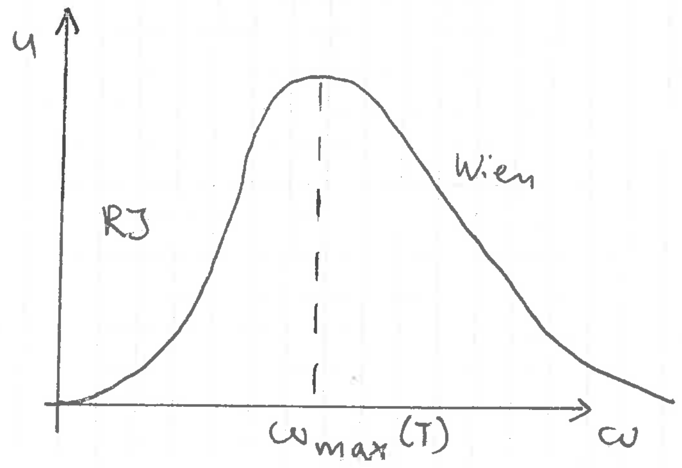
· Mit (8.83) folgt:

$$\boxed{u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}} \qquad (8.86)$$

: Plancksches Strahlungsgesetz.

· Grenzfälle: $\quad k_BT \gg \hbar\omega : u(\omega) \propto \omega^2$: Rayleigh-Jeans (8.87)

$\qquad k_BT \ll \hbar\omega : u(\omega) \propto \omega^3 e^{-\hbar\omega/k_BT}$: Wien (8.88)



< d) Wiensches Verschiebungsgesetz

· Ohne Beweis:

$$\frac{\hbar \omega_{max}}{k_B T} = f^{-1}(3) = 2{,}821 \qquad (8.89)$$

mit $f(x) = \dfrac{x e^x}{e^x - 1}$, d.h. $\omega_{max} \propto T$

· Definiere $\tilde{u}(\lambda)$ als Energiedichte je Frequenzintervall.

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\frac{U}{V} = \int_0^\infty d\lambda \frac{2\pi c}{\lambda^2} \, u\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) =$$

$$\overset{(8.86)}{=} \int_0^\infty d\lambda \frac{16\pi^2 \hbar c}{\lambda^5 \left(e^{hc/\lambda k_B T} - 1\right)} \qquad (8.90)$$

· Ohne Beweis:

$$\lambda_{max} \cdot T = \underset{\underset{4{,}965}{\uparrow}}{f^{-1}(5)} \frac{hc}{k_B} = 0{,}2898 \text{ cm K} \quad (8.91)$$

Sonne: $T = 6000\,K$ $\quad \lambda_{max} = \dfrac{0{,}29 \cdot 10^7}{6 \cdot 10^3} \text{nm} = 480 \text{ nm}$,

grün, wo das menschliche Auge am empfindlichsten ist.

9. Exakte Statistik ununterscheidbarer Teilchen

9.1. Das großkanonische Gesamtheit

a) Große Zustandssumme

In vollständiger Analogie zur kanonischen Gesamtheit ergibt sich:

$$\boxed{P(s) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-(U_s - \mu V_s)/k_B T}} \qquad (9.1)$$

· Große Zustandssumme

$$\boxed{\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_s e^{-(U_s - \mu V_s)/k_B T}} \qquad (9.2)$$

· Beachte: μ ist hier das chemische Potential je Teilchen,

$$\mu_{hier} \cdot N_{hier} = \mu_{alt} \cdot N_{alt} \quad \mu_{hier} = \mu_{alt}/L \quad N_{hier} = N_{alt} \cdot L \qquad (9.3)$$

$$\boxed{\Omega(T, V, \mu) = U - TS - \mu N = -PV = -kT \ln \mathcal{Z}} \qquad (9.4)$$

$$\mathcal{Z} = e^{-\Omega/k_B T} = e^{PV/k_B T} \qquad (9.5)$$

$$P(s) = e^{\{\Omega - (U_s - \mu V_s)\}/k_B T} \qquad (9.6)$$

b) Mittlere Teilchenzahl

$$\cdot \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \sum_s \frac{V_s}{k_B T} e^{-(U_s - \mu V_s)/k_B T} =$$

$$= \sum_s \frac{V_s}{k_B T} P(s) \mathcal{Z} = \mathcal{Z} \frac{\langle V \rangle}{k_B T} \qquad (9.7)$$

· Deshalb:

$$N = \langle \nu \rangle = k_B T \, \frac{1}{\mathcal{Z}} \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \mu} \right)_{T,V} \qquad (9.8)$$

$$\boxed{N = k_B T \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \mathcal{Z} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mu}} \qquad (9.9)$$

17.7.15

c) Energie

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial T} = \sum_s \left\{ -\frac{1}{k_B T^2} \right\} \left\{ \nu_s \mu - U_s \right\} P(s) \, \mathcal{Z} =$$

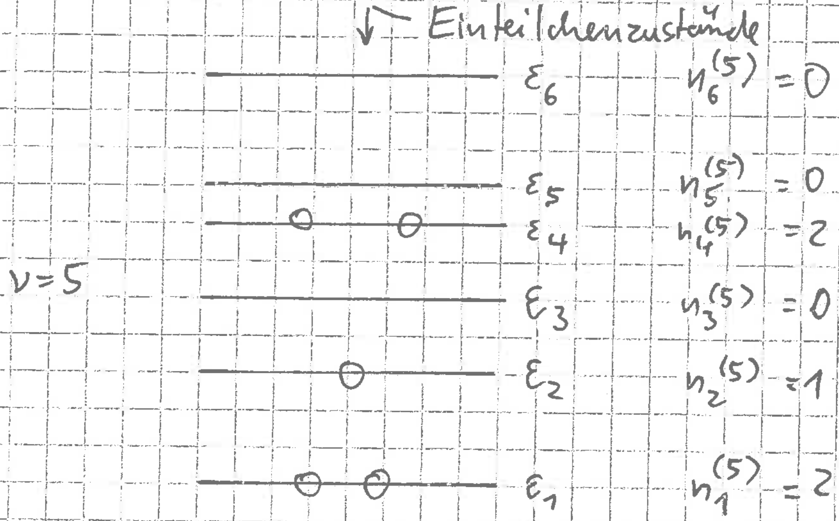
$$= - \frac{\mathcal{Z}}{k_B T^2} \left(N\mu - U \right) \qquad (9.10)$$

$$N\mu - U = - k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \mathcal{Z} \qquad (9.11)$$

$$U \overset{(9.9)}{\underset{(9.11)}{=}} k_B T \left\{ T \frac{\partial}{\partial T} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \ln \mathcal{Z} \qquad (9.12)$$

9.2. Nicht wechselwirkende ununterscheidbare Teilchen

a) Darstellung eines ν-Teilchen-Zustands



$$S^{(5)} = [2 1 0 2 0 0 \ldots] \in \mathbb{N}^{\infty} \qquad (9.13)$$

„Besetzungszahldarstellung"