Index: Abfolge natürlicher Zahlen oder Null
($\in$ Hilbertraum), ∞

· Allgemein:

$$s(\nu) = [n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \ldots, n_k^{(\nu)}, \ldots] \quad (9.14)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{(\nu)} = \nu \quad (9.15)$$

b) Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \sum_{\nu} \sum_{s(\nu)} e^{\{\mu\nu - U_{s(\nu)}\}/k_B T} =$$

$$= \sum_{\nu} \sum_{\{[n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \ldots n_k^{(\nu)} \ldots]\}} e^{\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{(\nu)} (\mu - \varepsilon_i)/k_B T} \quad (9.16)$$

wegen (9.15) und

$$U_{s(\nu)} = U_{[n_1^{(\nu)} \ldots]} = \sum_{i=1}^{\infty} n_i^{(\nu)} \varepsilon_i \quad (9.17)$$

c) Besetzungszahl

$$N_k = \langle n_k^{(\nu)} \rangle =$$

$$= \sum_{\nu} \sum_{\{[n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \ldots n_k^{(\nu)} \ldots]\}} P([n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \ldots, n_k^{(\nu)}, \ldots]) n_k^{(\nu)}$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\nu} \sum_{\{[n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \ldots n_k^{(\nu)} \ldots]\}} n_k^{(\nu)} e^{\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{(\nu)} (\mu - \varepsilon_i)/k_B T} \quad (9.18)$$

$$\boxed{N_k = -k_B T \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \ln \mathcal{Z} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon_k}} \quad (9.19)$$

NB! $\varepsilon_k = \varepsilon_k(V) \Rightarrow N_k = N_k(T, V, \mu)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k = N \overset{(9.9)}{=} -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \quad (9.20)$$

9.3. Bose-Einstein-Statistik

a) Zustandsfunktion

· Boseteilchen: ganzzahliger Spin, beliebige Zahl von Teilchen in jedem Einteilchenzustand!

· Umordnung:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\{[n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \dots n_K^{(\nu)}, \dots]\}} f(n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \dots, n_K^{(\nu)}, \dots) =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_K=0}^{\infty} \dots f(n_1, n_2, \dots, n_K, \dots) \quad (9.21)$$

• Setze $f_i \overset{(9.16)}{=} e^{(\mu-\varepsilon_i)/k_BT}$ $\quad$ (9.22)

· Dann folgt mit (9.16), (9.21):

$$\mathfrak{Z} = \sum_{n_1, n_2 \dots n_K = 0}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^{\infty} n_i (\mu-\varepsilon_i)/k_BT} =$$

$$= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_K} \dots \{ f_1^{n_1} \cdot f_2^{n_2} \dots f_K^{n_K} \dots \} =$$

$$= (1+f_1+f_1^2+\dots)(1+f_2+f_2^2+\dots)\dots(1+f_K+f_K^2+\dots)\dots$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_i^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-f_i} \quad \text{geom. Reihe} \quad (9.23)$$

$$\boxed{\mathfrak{Z}_{BE} = \prod_i \frac{1}{1-e^{(\mu-\varepsilon_i)/k_BT}}} \quad (9.24)$$

$$\Omega_{BE} = +k_BT \sum_i \ln\{1-e^{(\mu-\varepsilon_i)/k_BT}\} = -PV \quad (9.25)$$

b) Besetzungszahlen

$$N_k^{BE} \overset{(9.19)}{=} -k_B T \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \ln Z = \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon_k} =$$

$$\overset{(9.25)}{=} \frac{e^{(\mu-\varepsilon_k)/k_B T}}{1-e^{(\mu-\varepsilon_k)/k_B T}}$$

$$\boxed{N_k^{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/k_B T}-1}} \qquad (9.26)$$

c) Bemerkungen

- Setze Energieskala so, dass $\varepsilon_1 =$ Grundzustand $=0$. Dann $-\infty < \mu < 0$, da ansonsten N_k^{BE} negativ werden kann.
- Aber dann $N_k^{BE}(T\to 0) \to 0$ für alle k, und

$$N = \langle \nu \rangle \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} N_k^{BE} = 0 .$$

- Lösung für $N>0$?
  Postuliere $\lim_{T\to 0} \mu(T) = 0$, so dass $N_1^{BE} = N$
- Das ergibt eine makroskopische Besetzung ~~des~~ Einteilchengrundzustands, die Bose-Einstein-Kondensation!
- Für freie Teilchen in einer Box mit $\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ mit einer Einteilchenzustandsdichte wie (8.67) ergibt sich

$$\Omega(T,V,\mu) = k_B T \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon) \ln\{1-e^{(\mu-\varepsilon)/k_B T}\}$$

$$\overset{!}{=} -\frac{2}{3}U \overset{(9.25)}{=} -PV \qquad (9.27)$$

- Damit ist die Zustandsdichte

$$\boxed{PV = \frac{2}{3}U} \qquad (9.28)$$

9.4. Fermi-Dirac-Statistik

a) Zustandsfunktion

- Fermiteilchen mit halbzahligem Spin
- Besetzungszahl der Einteilchenzustände:

$n_i = 0$ oder $n_i = 1$

- $$Z_{FD} \overset{(9.23)}{=} \sum_{n_1, n_2, \dots n_K = 0}^{1} e^{\sum_{i=1}^{\infty} n_i (\mu - \varepsilon_i)/k_B T} =$$

$$= (1 + f_1)(1 + f_2) \dots (1 + f_K) = \dots =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} (1 + f_i) \qquad (9.29)$$

$$\boxed{Z_{FD} = \prod_i \{1 + e^{(\mu - \varepsilon_i)/k_B T}\}} \qquad (9.30)$$

$$\Omega_{FD} = -k_B T \sum_i \ln \{1 + e^{(\mu - \varepsilon_i)/k_B T}\} \qquad (9.31)$$

b) Besetzungszahlen

$$N_K^{FD} \overset{(9.19)}{=} \frac{\partial \Omega_{FD}}{\partial \varepsilon_K} = \frac{e^{(\mu - \varepsilon_K)/k_B T}}{1 + e^{(\mu - \varepsilon_K)/k_B T}} \qquad (9.32)$$

$$\boxed{N_k^{FD} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_K - \mu)/k_B T} + 1}} \qquad (9.33)$$

10 Das ideale Fermigas

- Besteht aus nichtwechselwirkenden Teilchen mit halbzahligem Spin J, $g_0 := 2J+1$ Spinzuständen

10.1. Extensive thermodynamische Variable

a) Großes Potenzial

$\varepsilon_K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $D(\varepsilon)$ wie in 8.7b) multipliziert mit g_0.

$$\Omega \overset{(9.31)}{=} -k_B T \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon) \ln\left\{1 + e^{(\mu-\varepsilon)/k_BT}\right\}$$

$$\overset{(8.67)}{=} -k_B T \frac{g_0 V}{4\pi^2} \left\{\frac{2m}{\hbar^2}\right\}^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \ln\left\{1 + e^{(\mu-\varepsilon)/k_BT}\right\} \quad (10.1)$$

b) Teilchenzahl

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \overset{(9.34)}{=} \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, f(\varepsilon, T, \mu) \qquad (10.2)$$

mit

$$\boxed{f(\varepsilon, T, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT} + 1}} \qquad (90.3)$$

- Das ist die mittlere Besetzungszahl eines Zustands mit Energie ε, vgl. (9.33).

- $D(\varepsilon)\, f(\varepsilon, T, \mu)$: mittlere Dichte der besetzten Zustände

- $$N \overset{(10.2)}{\underset{(10.3)}{=}} \frac{g_0 V}{4\pi^2} \left\{\frac{2m}{\hbar^2}\right\}^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT+1}} \qquad (10.4)$$

$$= N(T, V, \mu)$$

- Bei Inversion ergibt sich $\mu = \mu(T, V, N)$

c) Innere Energie

$$U \overset{(9.2)}{=} k_B T \left\{ T \frac{\partial}{\partial T} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \ln Z = \quad \text{nach einigen Schritten}$$

$$= \int_0^\infty d\varepsilon \, D(\varepsilon) \, f(\varepsilon, T, \mu) \, \varepsilon$$

$$\overset{(10.3)}{=} \frac{g_0 V}{4\pi^2} \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} \right\}^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}+1} =$$

$$= \text{part. Integration} \overset{(10.1)}{=} -\frac{3}{2}\Omega \qquad (10.5)$$

- Daraus folgt die Zustandsgleichung

$$\boxed{\Omega = -\frac{2}{3}U = -PV \quad , \quad P = \frac{2}{3}\frac{U}{V}} \qquad (10.6) \text{ vgl } (9.28)$$

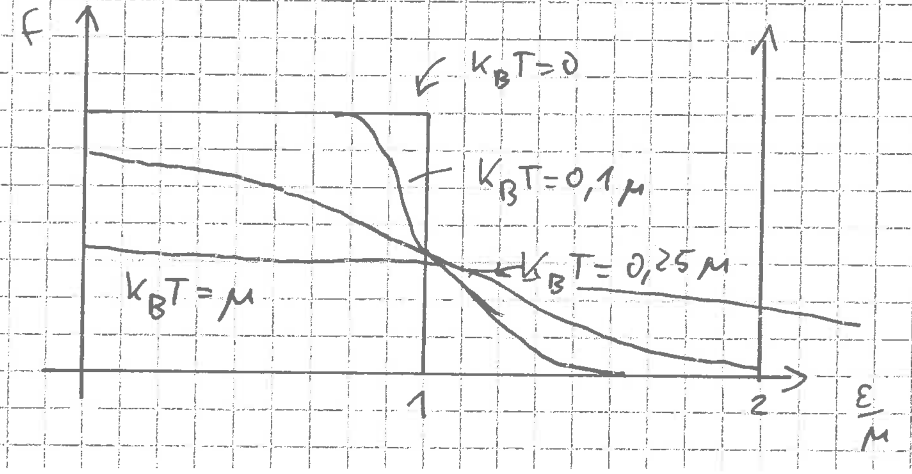
Vgl. ideales monoatomares Gas:

$$PV = NRT \quad , \quad U = \frac{3}{2}NRT \quad \Rightarrow \quad P = \frac{2}{3}\frac{U}{V} \; ! \qquad (10.7)$$

10.2 Quantenlimit T=0

a) Fermigas bei T=0

$$f(\varepsilon, T\to 0, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}+1} \begin{cases} 1 & \text{wenn } \varepsilon < \mu\,(T=0, \frac{N}{V}) \\ 0 & \text{wenn } \varepsilon > \mu\,(T=0, \frac{N}{V}) \end{cases} \qquad (10.8)$$



NB! $f\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right) := \frac{1}{e^{\left(\frac{\varepsilon}{\mu}-1\right)\mu/k_BT}+1}$

$f\left(2-\frac{\varepsilon}{\mu}\right) \stackrel{!}{=} 1 - f\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)$: Symmetrie

$$N \underset{g_0=2}{\overset{(10.4)\,(10.8)}{=}} \frac{V}{2\pi^2}\left\{\frac{2m}{\hbar^2}\right\}^{3/2}\int_0^{\mu_0} d\varepsilon\,\sqrt{\varepsilon} = \frac{V}{3\pi^2}\left\{\frac{2m}{\hbar^2}\right\}^{3/2}\mu_0^{3/2} \quad (10.10)$$

$$\boxed{\mu_0 =: \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3} =: k_B T_F} \quad (10.11)$$

$\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{(3\pi^2)^{2/3}}{k_B} = 0{,}423 \cdot 10^{-14}$ [$m^2 K$] für Elektronen

$n \approx 10^{29}\ m^{-3}$

$\Rightarrow T_F \approx 10^5\ K$, „Fermitemperatur" in Metall.

b) Grundzustandsenergie

$$\boxed{U(T=0) \overset{(10.5)}{=} \int_0^{\mu_0} d\varepsilon\, D(\varepsilon)\,\varepsilon \overset{\text{Vgl}\,(10.10)}{=} \frac{3}{5} N \mu_0} \quad (10.12)$$

$T \ll T_F \quad \frac{U}{N} = \frac{3}{5} k_B T_F$ vgl. ideales Gas $\frac{3}{2} k_B T$

c) Spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen

$$c_N = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,\mu} \overset{(10.5)}{=} \int_0^{\infty} d\varepsilon\, D(\varepsilon)\,(\varepsilon-\mu_0)\, f(\varepsilon; T, \mu)$$

$\frac{\partial f}{\partial T}$: nur Beitrag bei μ_0 , ersetze $D(\varepsilon)$ durch $D(\mu_0)$

$$C_N = D(\mu_0)\int_0^\infty d\varepsilon\, k_B(\varepsilon-\mu_0)\,\frac{\varepsilon-\mu_0}{k_B^2T^2}\,\frac{e^{(\varepsilon-\mu_0)/k_BT}}{\{e^{(\varepsilon-\mu_0)/k_BT}+1\}^2}$$

$$x := (\varepsilon-\mu_0)/k_BT \quad , \quad d\varepsilon = k_BT\,dx$$

$$C_N = k_B^2\,T\,D(\mu_0)\underbrace{\int_{\underbrace{-\mu_0/k_BT}_{-\infty}}^{\infty}\frac{dx\,x^2}{(e^x+1)^2}}_{\pi^2/3} = \frac{1}{3}\pi^2\,D(\mu_0)\,k_B^2\,T \quad (10.13)$$

$$D(\mu_0) \underset{(10.10)}{=} \frac{3N}{2k_BT_F} \quad (10.14)$$

$$\boxed{C_N = \frac{1}{2}\pi^2\,N\,k_B\,\frac{T}{T_F}} \quad (10.15)$$

Beitrag der Elektronen: linear in T.