$$\Rightarrow \phi_D(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\underline{r}\cdot\underline{a}}{r^3} + \frac{3(\underline{r}\cdot\underline{a})^2 - r^2a^2}{2r^5} + \dots\right\} \qquad (2.25)$$

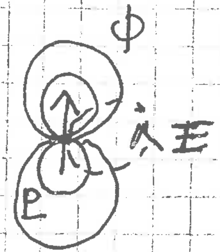
• Definition Punktdipol: $\underline{a}\to\underline{0}$, aber $\underline{p} = \lim\limits_{\substack{\underline{a}\to 0\\ q\to\infty}} q\underline{a}$ (2.26)

(Dipolmoment) bleibt endlich.

• Folgt: $\phi_D(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}\cdot\underline{p}}{r^3} \overset{(2.14)}{=} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\underline{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}$ (2.27)

• In Polarkoordinaten ($\underline{p}$ ∥ Polarachse)

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^2} \qquad (2.28)$$



• Dipolfeld:

$$\underline{E}_D(\underline{r}) = -\nabla\phi_D(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\underline{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) \qquad (2.29)$$

• Mit $\nabla(\underline{a}\cdot\underline{b}) = \cancelto{\text{const}}{(\underline{b}\cdot\nabla)\underline{a}} + (\underline{a}\cdot\nabla)\underline{b} + \underline{b}\times\cancelto{\text{const}}{\text{rot}\,\underline{a}} + \underline{a}\times\cancelto{\nabla\times\nabla}{\text{rot}\,\underline{b}}$ (2.29a)

$\underline{a} = \underline{p}$, $\underline{b} = \nabla\frac{1}{r}$ und $\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\underline{r}}{r^5}$

folgt:

$$\underline{E}_D(\underline{r}) = \frac{\underline{p}}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3\,\underline{r}\otimes\underline{r} - r^2\,\underline{\underline{1}}}{r^5}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3(\underline{r}\cdot\underline{p})\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{p}}{r^3}\right\} \qquad (2.30)$$

• Definiere Dipoldichte

$$\Pi(\underline{r}) \underset{(2.13)}{\overset{\text{Vgl.}}{=}} \sum_{j=1}^{N} \underline{p}_j\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_j) \qquad (2.31)$$

so folgt:

$$\phi_D(\underline{r}) \overset{(2.29)}{=} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\underline{r}'\;\underline{\Pi}(\underline{r}')\,\nabla_{\underline{r}}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (2.32)$$

ii) Kraft und Drehmoment

• Kraft auf Dipol im externen elektrischen Feld:

$$\underline{F}_D(\underline{r}) = -q\,\underline{E}(\underline{r}) + q\,\underline{E}(\underline{r}+\underline{a}) \qquad (2.33)$$

• Taylorentwicklung:

$$\underline{E}(\underline{r}+\underline{a}) = \underline{E}(\underline{r}) + (\underline{a}\cdot\nabla)\,\underline{E}(\underline{r}) + \frac{1}{2}(\underline{a}\cdot\nabla)^2\,\underline{E}(\underline{r}) + \dots \qquad (2.34)$$

und Grenzübergang (2.26) führt zu

$$\underline{F}_D(\underline{r}) = (\underline{p}\cdot\nabla)\,\underline{E}(\underline{r}) \overset{(\bullet)}{\underset{(2.29a)}{=}} \nabla(\underline{p}\cdot\underline{E}) \qquad (2.35)$$

$$\Rightarrow V_D(\underline{r}) = -\underline{p}\cdot\underline{E}(\underline{r}) \qquad (2.36)$$

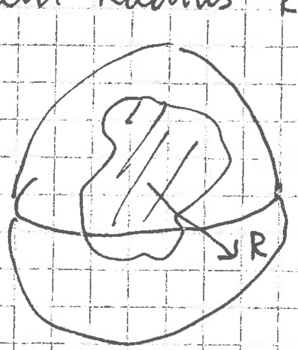
• Drehmoment:

$$\underline{M}_D(\underline{r}) = -q\,\{\underline{r}\times\underline{E}(\underline{r})\} + q\,\{(\underline{r}+\underline{a})\times\underline{E}(\underline{r}+\underline{a})\}$$

$$\overset{(2.34)}{\underset{(2.26)}{=}} \underline{p}\times\underline{E}(\underline{r}) + \underline{r}\times\underline{F}_D(\underline{r}) \qquad (2.37)$$

2.4. Multipolentwicklung

• Sei der Träger der Ladungsdichte ϱ auf einen Ball von endlichem Radius R beschränkt.



• Ziel: Asymptotisches Verhalten von ϕ und $\underline{E}$ in der Fernzone $r \gg R$

• Mit (2.16):

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{|\underline{r}'|<R} d^3\underline{r}' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (2.38)$$

• Taylorentwicklung nach Potenzen in $\frac{r'}{r}$:

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \overset{!}{=} \exp\{-\underline{r}'\cdot\nabla\}\frac{1}{r} = \frac{1}{r} - (\underline{r}'\cdot\nabla)\frac{1}{r} + \ldots$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r^3} + \ldots \qquad (2.39)$$

• Folgt:

$$4\pi\varepsilon_0\,\phi(\underline{r}) = \frac{1}{r}\int d^3\underline{r}'\,\rho(\underline{r}') + \frac{\underline{r}}{r^3}\int d^3\underline{r}'\,\underline{r}'\,\rho(\underline{r}') + \ldots$$

$$=: \frac{q}{r} + \frac{\underline{r}\cdot\underline{p}}{r^3} + \ldots \qquad (2.40)$$

mit i) Monopolterm $\quad q = \int d^3\underline{r}'\,\rho(\underline{r}') \qquad (2.41)$

ii) Dipolterm $\quad \underline{p} = \int d^3\underline{r}'\,\underline{r}'\,\rho(\underline{r}') \qquad (2.42)$

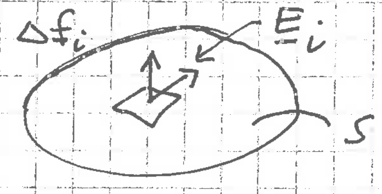
- ändert sich bei Verschiebung des Ursprungs, es sei denn $q=0$.
- $\underline{p} = \underline{0}$ bei spiegelsymmetrischer Ladungsverteilung.

12.4.

2.5. Maxwellgleichungen der Elektrostatik

a) Mathematische Vorbemerkungen

i) Flächenintegrale



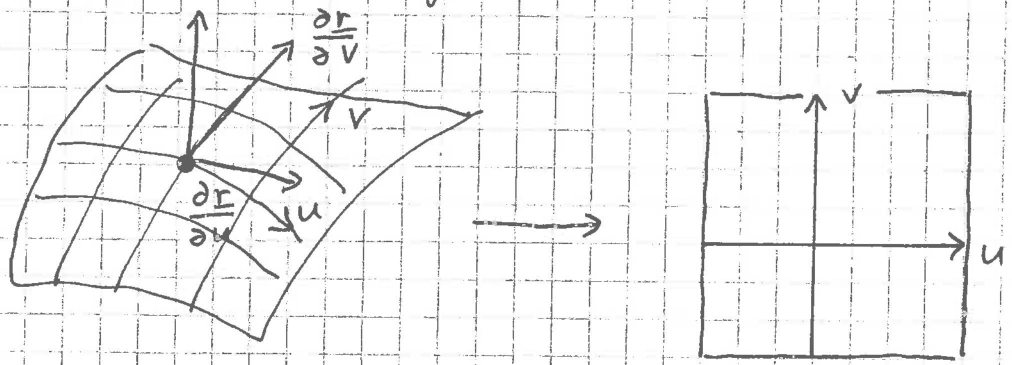
• S Fläche

$$\sum_i \underline{E}_i\cdot\Delta\underline{f}_i \longrightarrow \int_S d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) : \text{„elektrischer Fluss"} \qquad (2.43)$$

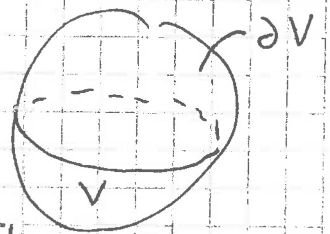
· Genauer: $S = \{ \underline{r}(u,v) \mid (u,v) \in A \subset \mathbb{R}^2 \text{ Parameter} \}$ (2.44)

$$\int_S d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_A du\, dv \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right) \cdot \underline{E}(\underline{r}(u,v)) \qquad (2.45)$$

Koordinatenbasis des Tangenzialraums



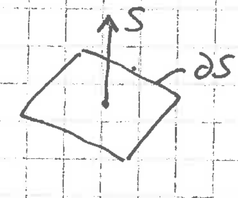
ii) Der Satz von Gauß



· V Volumen, ∂V Rand

$$\boxed{\int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3\underline{r}\ \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r})} \qquad (2.46)$$

iii) Der Satz von Stokes



$$\boxed{\int_S d\underline{f} \cdot \operatorname{rot} \underline{E} = \int_{\partial S} d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r})} \qquad (2.47)$$

iv) Identität

$$\boxed{\delta(\underline{r} - \underline{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}} \qquad (2.48)$$

b) Der physikalische Gaußsatz

· Elektrischer Fluss allgemein:

$$\int d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) \overset{(2.12)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\underline{r}'\,\varrho(\underline{r}')\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} =$$

$$\overset{(2.14)}{=} \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\underline{r}'\,\varrho(\underline{r}')\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\nabla_{\underline{r}}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} =$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\underline{r}'\,\varrho(\underline{r}')\int_V d^3\underline{r}\,\Delta_{\underline{r}}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} =$$

$$\overset{(2.48)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3\underline{r}\,\varrho(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}q(V) \qquad (2.49)$$

- Elektrischer Fluss aus einem Volumen =

  = Ladung innerhalb des Volumens

- Ladungen = Quellen des $\underline{E}$-Feldes.

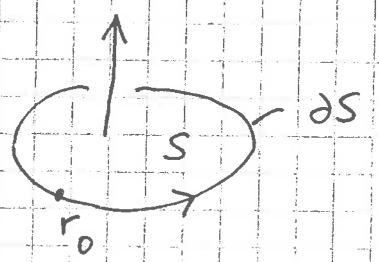
- Mit mathematischem Gaußsatz folgt:

$$\int_V d^3\underline{r}\,\left\{\operatorname{div}\underline{E}(\underline{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\underline{r})\right\} = 0 \qquad (2.50)$$

- Gilt für beliebige Volumina, daher ist:

$$\boxed{\operatorname{div}\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho} \qquad (2.51)$$

c) Wirbelfreiheit



$$\int_{\partial S} d\underline{s}\cdot\underline{E}(\underline{s}) \underset{\underline{r}=\underline{r}_0}{\overset{(2.20)}{=}} 0 =$$

$$\underset{(2.47)}{\overset{\text{Stokes}}{=}} \int_S d\underline{f}\cdot\operatorname{rot}\underline{E} \qquad (2.52)$$

- Folgt: $\boxed{\text{rot } \underline{E} = 0}$ (2.53)

- (2.51), (2.53): Maxwellgleichungen der Elektrostatik.

d) Grundproblem der Elektrostatik

- (2.53) wird gelöst durch Einführung eines Potenzials
  $\underline{E} = -\nabla \phi$ (2.15)

- Ansatz (2.15) in (2.51) führt zur Poissongleichung

$$\boxed{\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})} \qquad (2.54)$$

- Lösung dieser linearen, inhomogenen, partiellen (elliptischen) Differentialgleichung zweiter Ordnung ist das Grundproblem der Elektrostatik.

- Keine Randbedingungen im Endlichen: Lösung gegeben durch (2.16):

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\underline{r}' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \qquad (2.55)$$

- Punktladung: $\phi(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$ (2.16a)

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} q \, \delta(\underline{r}) \iff -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} = \delta(\underline{r}) \quad \text{vgl. (2.48)}$$

- Häufig: $\rho(\underline{r}')$ gegeben in beschränktem V,
  $\phi(\underline{r})$ oder $\nabla \phi(\underline{r})$ gegeben auf ∂V:

  Randwertproblem der Elektrostatik.

21.4.