$$\int df \cdot \underline{E}(\underline{r}) \overset{(2.12)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \int_{\partial V} df \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} =$$

$$\overset{(2.14)}{=} \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} =$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \int_V d^3\underline{r}\, \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} =$$

$$\overset{(2.48)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d\underline{r}^3\, \rho(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} q(V) \qquad (2.49)$$

- Elektrischer Fluss aus einem Volumen =

  = Ladung innerhalb des Volumens

- Ladungen = Quellen des $\underline{E}$-Feldes.

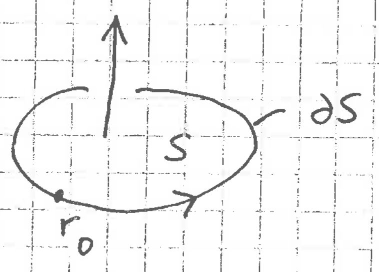
- Mit mathematischem Gaußsatz folgt:

$$\int_V d^3\underline{r}\ \left\{ \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r}) \right\} = 0 \qquad (2.50)$$

- Gilt für beliebige Volumina, daher ist:

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho} \qquad (2.51)$$

c) <u>Wirbelfreiheit</u>



$$\int_{\partial S} d\underline{s} \cdot \underline{E}(\underline{s}) \underset{\underline{r}=\underline{r}_0}{\overset{(2.20)}{=}} 0 =$$

$$\underset{(2.47)}{\overset{\text{Stokes}}{=}} \int_S d\underline{f} \cdot \operatorname{rot} \underline{E} \qquad (2.52)$$

2.6. Beispiel: der Kugel Kondensator

- Zwei Konzentrierte Kugelschalen der Radien R_1 und R_2, darauf homogen verteilte Ladungen $\pm q$.

- Ladungsdichte:

$$\rho(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi R_1^2}\,\delta(r-R_1) - \frac{q}{4\pi R_2^2}\,\delta(r-R_2) \qquad (2.56)$$

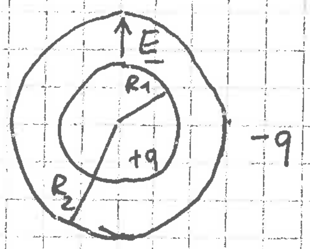
- NB! $\displaystyle\int_{R_1-\varepsilon}^{R_1+\varepsilon} d^3\underline{r}\, \frac{q}{4\pi R_1^2}\,\delta(r-R_1) = \frac{q}{4\pi R_1^2}\, 4\pi \int_{R_1-\varepsilon}^{R_1+\varepsilon} dr\, r^2\, \delta(r-R_1) = q$

- Ladungsverteilung Kugelsymmetrisch, folglich ist

$$\underline{E}(\underline{r}) = E(r)\,\hat{e}_r \qquad (2.57)$$

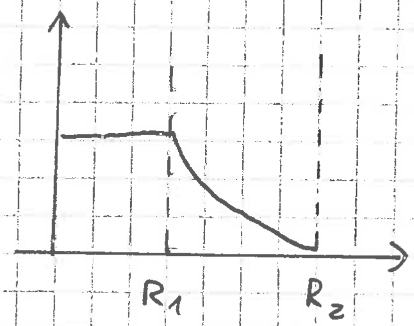
- Aus dem Gaußsatz folgt:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{e}_r \begin{cases} 0 & \text{falls } r < R_1 \\ \dfrac{1}{r^2} & \text{falls } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{falls } R_2 < r \end{cases} \qquad (2.58)$$



- Skalares Potenzial mit Randbedingungen $\phi(\underline{r} \to \infty) = 0$, ϕ stetig bei $r = R_1$, $r = R_2$ (aber nicht unbedingt diff'bar)

$$\phi(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} & \text{falls } r < R_1 \\ \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_2} & \text{falls } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{falls } R_2 \leq r \end{cases} \qquad (2.59)$$



- Spannung zwischen den Kugelschalen:

$$U = \Phi(R_1) - \Phi(R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (2.60)$$

- Definition der Kapazität C

$$\boxed{q = C \cdot U} \qquad (2.61)$$

- Folgt: $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ (2.62)

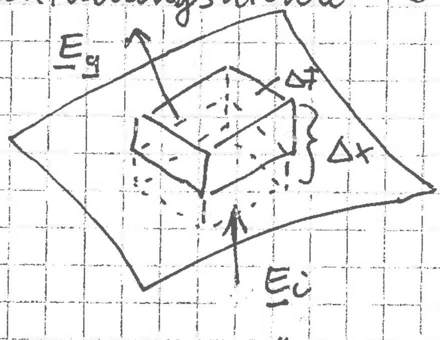
- Einheit: $[C] = 1\,F$ (Farad) $= 1 \frac{As}{V}$ (2.63)

- Plattenkondensator

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \left[\overset{(2.5)}{\approx} 9 \cdot 10^{-12} \frac{S}{d}\right]$$

2.7. Feldverhalten an Grenzflächen

- Flächenladungsdichte σ $[C\,m^{-2}]$



(2.64)

- „Gaußkästchen" mit Volumen ΔV und Kantenlänge $\Delta x \to 0$

- $$\int_{\Delta V} d^3\underline{r}\ \mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r}) \overset{(2.46)}{=} \int_{\partial\Delta V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) \xrightarrow[\Delta F\to 0]{\Delta t\to 0} \Delta F\,\hat{n}\cdot(\underline{E}_a-\underline{E}_i) \quad (2.65)$$

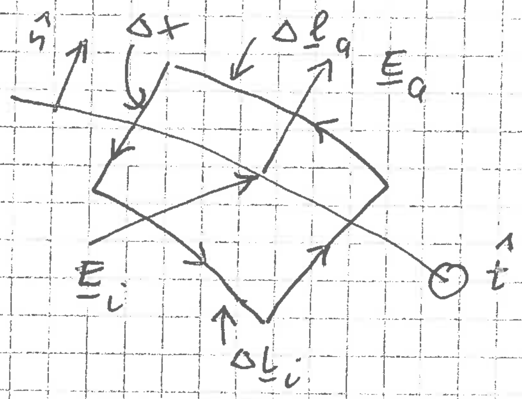
- Andererseits:

$$\int_{\Delta V} d^3\underline{r}\ \mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Delta V} d^3\underline{r}\ \varrho(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\sigma\,\Delta F \quad (2.66)$$

- Folgt: $$\hat{n}\cdot(\underline{E}_a-\underline{E}_i) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (2.67)$$

- Normalkomponente des Feldes unstetig.

- Stokesfläche:



$$0 = \int_{\Delta S} d\underline{f}\cdot\mathrm{rot}\,\underline{E} = \int_{\partial\Delta S} d\underline{r}\cdot\underline{E}$$

$$\Delta\underline{l}_a = \Delta l\,(\hat{t}\times\hat{n}) = -\Delta\underline{l}_i$$

$$0 = \int_{\partial\Delta S} d\underline{r}\cdot\underline{E} \longrightarrow \Delta l\,(\hat{t}\times\hat{n})\cdot(\underline{E}_a-\underline{E}_i) \quad (2.68)$$

- Tangentialkomponente stetig.

17.4.

2.8. Elektrostatische Feldenergie

a) Arbeit zur Verschiebung einer Punktladung

- Verschiebung von B nach A gegen elektrisches Feld:

- $$W_{AB} = -\int_B^A \underline{F}\cdot d\underline{r} = -q\int_B^A \underline{E}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = q\int_B^A d\phi =$$

$$= q\,\{\phi(A)-\phi(B)\} = q\,U_{AB} \quad (2.69)$$

- Positiv, wenn Arbeit am System geleistet wird.

• **Definition (2.70)**

Die Energie einer auf einem endlichen Raumbereich beschränkten Ladungsverteilung $\varrho(\underline{r})$ ist gleich der Arbeit, die man benötigt, um die Ladung aus dem Unendlichen ($\phi(\infty) = 0$ wegen (2.16)) zusammenzuziehen.

b) N Punktladungen

• $(i-1)$ Punktladungen q_j bei $\underline{r}_j$ erzeugen bei $\underline{r}_i$ das Potenzial

$$\phi(\underline{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \qquad (2.71)$$

• Arbeit, um die Ladung q_i von ∞ nach $\underline{r}_i$ zu bringen:

$$W_i \overset{(2.69)}{=} q_i \{ \phi(\underline{r}_i) - \phi(\infty) \} = q_i\, \phi(\underline{r}_i) \qquad (2.72)$$

• Gesamtarbeit: für erste Ladung keine Arbeit nötig

$$W = \sum_{\substack{i=2 \\ !}} W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \qquad (2.73)$$

c) Kontinuierliche Ladungsverteilungen

• Verallgemeinerung von (2.73)

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3\underline{r} \int d^3\underline{r}' \frac{\varrho(\underline{r})\,\varrho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\overset{(2.55)}{=} \frac{1}{2} \int d^3\underline{r}\; \varrho(\underline{r})\, \phi(\underline{r}) \qquad (2.74)$$

• Mit elektrischem Feld ausdrücken, wobei

$$\rho(\underline{r}) \overset{(2.54)}{=} -\varepsilon_0 \Delta \phi(\underline{r}) \quad \text{und}$$

$$\phi(\underline{r})\,\Delta\phi(\underline{r}) = \nabla\cdot(\phi\nabla\phi) - (\nabla\phi)^2 \qquad (2.75)$$

somit $$W \overset{(2.75)}{=} \underbrace{-\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\underline{r}\;\mathrm{div}(\phi\nabla\phi)}_{} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\underline{r}\,(\nabla\phi)^2$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \underbrace{d\underline{f}}_{\propto r^2}\cdot(\underbrace{\phi}_{\propto \frac{1}{r}}\,\underbrace{\nabla\phi}_{\propto\frac{1}{r^3}}) \to 0 \qquad (2.76)$$

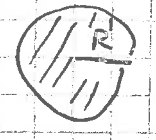
und

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\underline{r}\;|\underline{E}(\underline{r})|^2} \qquad (2.77)$$

• NB! (2.73) kann $\gtrless 0$ sein, (2.77) nur > 0.

Grund: (2.73) enthält nicht die divergierende „Selbtenergie" der Punktladungen $i=j$:

Kontraktion aus einer unendlich verdünnten Ladungswolke

$\cdot \overset{R\to 0}{=}$ 

$$W \overset{\text{oB}}{=} \frac{3}{5}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{in (2.74) und (2.77)}$$

enthalten, nicht in (2.73)

24.4

d) Wechselwirkung einer Ladungsverteilung mit einem äußeren elektrischen Feld