- $$W \overset{(2.74)}{=} \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\iint d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{r}'\, \frac{\{\rho(\mathbf{r})+\rho_{ex}(\mathbf{r})\}\{\rho(\mathbf{r}')+\rho_{ex}(\mathbf{r}')\}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad (2.78)$$

- Wechselwirkungsanteil:

- $$W_{WW} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{r}'\, \frac{\rho(\mathbf{r})\rho_{ex}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \overset{(2.16)}{=} \int d^3\mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r})\phi_{ex}(\mathbf{r}) \qquad (2.79)$$

- Sei der Träger von ρ so klein und ϕ_{ex} so glatt, dass man entwickeln kann:

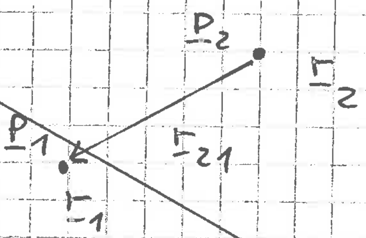
$$\phi_{ex}(\mathbf{r}) = \phi_{ex}(\mathbf{0}) + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\phi_{ex}(0) + \dots$$

$$\overset{(2.15)}{=} \phi_{ex}(\mathbf{0}) - \mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{0}) + \dots \qquad (2.80)$$

- In (2.79):

$$W_{WW} \overset{(2.41,42)}{=} q\,\phi_{ex}(\mathbf{0}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{0}) + \dots \qquad (2.81)$$

- Wechselwirkung zwischen zwei Dipolen:



$$W_{D_1D_2} = -\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_{21}) \overset{(2.30)}{=} -\mathbf{p}_1\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3\mathbf{r}_{21}(\mathbf{r}_{21}\cdot\mathbf{p}_2)}{r_{21}^5} - \frac{\mathbf{p}_2}{r_{21}^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2}{r_{12}^3} - \frac{3(\mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{p}_1)(\mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{p}_2)}{r_{12}^5}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}^3}\,\mathbf{p}_1\cdot\left\{3\,\hat{\mathbf{r}}_{12}\otimes\hat{\mathbf{r}}_{12} - 1\right\}\cdot\mathbf{p}_2 \qquad (2.82)$$

Monopol wechselwirkt mit Potenzial,

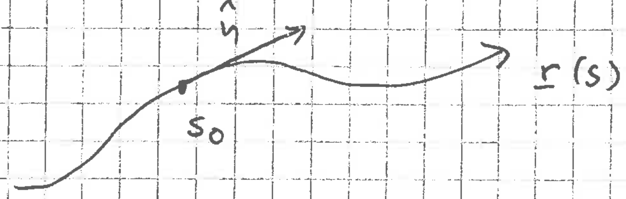
Dipol mit Feld, ⟨Quadrupol mit Ableitung des Feldes⟩

2.9 Die greenschen Sätze

a) Voraussetzungen

- φ, ψ zweimal stetig differenzierbare skalare Felder, V beschränktes Volumen mit Oberfläche ∂V
- Definiere Vektorfeld $\underline{E} \overset{\text{Vgl. (2.75)}}{=} \varphi(r) \operatorname{grad} \psi(r)$ (2.83)
- $\operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}) \underset{\text{regel}}{\overset{\text{Produkt}}{=}} \varphi \Delta \psi + \nabla\varphi \nabla\psi$ (2.84)
- Flächenelement $d\underline{f} =: \hat{n}\, df$ (2.85)
- $(\hat{n} \nabla)\psi =: \dfrac{\partial \psi}{\partial n} = \partial_{\hat{n}} \psi$ = Richtungsableitung entlang $\hat{n}$

$$= \frac{d}{ds} \psi(\underline{r}(s)) \Big|_{s_0} \quad \text{mit} \quad \frac{d\underline{r}}{ds}(s_0) = \hat{n}$$



(2.86)

b) Folgerungen

1. Greensche Identität

$$\int_V d^3\underline{r} \; \{\varphi \Delta \psi + (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)\} \underset{(2.46)}{\overset{\text{Gauß}}{=}} \int df \; \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (2.87)$$

- Vertausche φ und ψ in (2.87) und bilde Differenz:

2. Greensche Identität

$$\int_V d^3\underline{r} \, \{\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi\} = \int_{\partial V} df \, \left\{\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} \quad (2.88)$$

- Setze in (2.88) $\varphi = 1$, so folgt weiterhin:

$$\int_V d^3\underline{r} \; \Delta \psi = \int_{\partial V} df \; \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad , \quad (2.89)$$

2.10. Das Randwertproblem

a) Formulierung

· <u>gegeben</u>: $\rho(\underline{r})$ in V, ϕ oder $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\hat{n}\cdot\underline{E}$

auf Grenz- oder Randflächen von V

· <u>Gesucht</u>: $\phi(\underline{r})$, $\underline{r}\in V$

· Setze in (2.88) für φ $\phi(\underline{r}')$ ein, für $\psi(\underline{r}')$ $|\underline{r}-\underline{r}'|^{-1}$

· Folgt:

$$\int_V d^3\underline{r}' \left\{ \phi(\underline{r}')\, \Delta_{\underline{r}'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, \Delta_{\underline{r}'} \phi(\underline{r}') \right\} =$$

einerseits $\overset{(2.48)}{\underset{(2.54)\ \text{Poisson}}{=}} -4\pi \int_V d^3\underline{r}'\, \phi(\underline{r}')\,\delta(\underline{r}-\underline{r}') + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} =$

andrerseits $\overset{(2.88)}{=} \int_{\partial V} df' \left\{ \phi(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\frac{\partial \phi}{\partial n'} \right\}$

· Folgt für das Potential:

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} df' \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi(\underline{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right\} \quad (2.90)$$

Folgerungen

i) ρ in V sowie ϕ bzw. $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \hat{n}\cdot\nabla\phi$ auf ∂V bestimmen das Potential in ganz V

ii) $\rho = 0$ in $V \Rightarrow \phi$ ist durch $\phi|_{\partial V}$ und $\frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_{\partial V}$ bestimmt

iii) $V = \mathbb{R}^3$, $\phi(\underline{r}') \xrightarrow{r' \to \infty} \frac{1}{r'}$ $\Rightarrow$ Integrand (2.90) $\xrightarrow{r' \to \infty} \frac{1}{r'^3}$

Das Oberflächenintegral verschwindet, nur das Volumen-(Poisson)-Integral (2.16) bleibt.

iv) (2.90) ist Integralgleichung und ersetzt die Poissongleichung mit Randbedingungen < ϕ links und rechts >

b) Klassifikation der Randbedingungen

i) Dirichlet-Randbedingungen $\phi\big|_{\partial V}$ gegeben.

ii) Neumann-Randbedingungen $\frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_{\partial V}$ gegeben.

<iii) Cauchy-Randbedingungen: $\phi\big|_{\partial V}$ und $\frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_{\partial V}$ gegeben. >

c) Satz zur Eindeutigkeit der Lösungen

· Seien ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen der Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi_{1,2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$$

mit $\phi_1(\underline{r}) = \phi_2(\underline{r})$ für alle $\underline{r} \in \partial V$

oder $\frac{\partial \phi_1}{\partial n}(\underline{r}) = \frac{\partial \phi_2}{\partial n}(\underline{r})$ für alle $\underline{r} \in \partial V$

· Sowohl Dirichlet- als auch Neumann-Randbedingungen führen zu physikalisch eindeutigen Lösungen.

· Dirichlet: $\phi_1(\underline{r}) = \phi_2(\underline{r})$, Neumann $\phi_1(\underline{r}) = \phi_2(\underline{r}) + \mathrm{const}(V)$

<· Cauchy: Überbestimmtes Problem >

d) Physikalische Randbedingungen

i) Leiter (Metalle)

- Ladungen im Inneren frei verschiebbar

$$\underline{E} \equiv 0 \,, \quad \phi = \text{const im Leiter} \qquad (2.91)$$

- Grenzfläche zum Vakuum: $E_i^{(t)} \overset{(2.91)}{=} 0 \overset{(2.68)}{=} E_a^{(t)}$ (2.92)

$$E_i^{(n)} = 0 \,, \quad E_a^{(n)} \overset{(2.67)}{=} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (2.93)$$

- Leiteroberfläche = Äquipotentialfläche
  Dirichlet-RBD: $\phi = \text{const}$.

- Leiterinneres ist wegen (2.91) und Gauß (2.46) ladungsneutral.

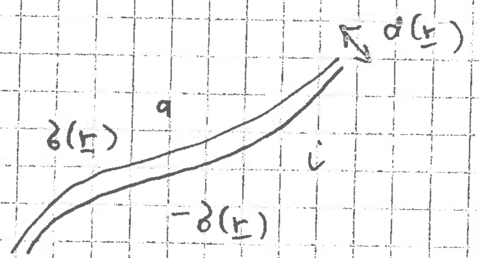
- Ein äußeres Feld influenziert Ladungen an der Leiteroberfläche derart, dass das Gesamtfeld senkrecht dazu steht.

ii) Geladene Flächen

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \overset{(2.67)}{=} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (2.93)$$

⟨iii) Dipolschichten⟩

$$\phi_a - \phi_i = + \frac{1}{\varepsilon_0} D \quad (\text{Dipolflächendichte}) \qquad (2.94)$$



$$D(\underline{r}) = \lim_{\substack{d \to 0 \\ \sigma \to \infty}} \sigma(\underline{r}) \cdot d(\underline{r})$$

19.4.

2.11. Lösung des Randwertproblems mit greenschen Funktionen

a) Definition

- Eine greensche Funktion $G(\underline{r},\underline{r}')$ ist Lösung der Poissongleichung für eine Punktladung $q=1$ am Ort $\underline{r}'$:

$$\Delta_{\underline{r}} G(\underline{r},\underline{r}') \overset{(2.54)}{=} -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}') \qquad (2.95)$$

- Wegen des Superpositionsprinzips gilt dann für eine beliebige Ladungsdichte

$$\varrho(\underline{r}) = \int d^3r'\ \varrho(\underline{r}')\,G(\underline{r},\underline{r}') \qquad (2.96)$$

- Mit (2.48) folgt:

$$G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + f(\underline{r},\underline{r}') \qquad (2.97)$$

mit der „Bildpotenzialfunktion" $f(\underline{r},\underline{r}') = f(\underline{r}',\underline{r})$, welche die Gleichung

$$\Delta_{\underline{r}}\, f(\underline{r},\underline{r}') = 0 \qquad (2.98)$$

erfüllt, daher „harmonisch" heißt und zur Realisierung der Randbedingungen dient.

b) Berücksichtigung der Randbedingungen

- Zweite greensche Identität (2.88) mit $\varphi = \Phi$, $\psi = G$:

$$\int d^3\underline{r}' \left\{ \phi(\underline{r}')\, \Delta_{\underline{r}'}\, G(\underline{r},\underline{r}') - G(\underline{r},\underline{r}')\, \Delta_{\underline{r}'}\phi(\underline{r}') \right\} =$$

$$\underset{\substack{(2.54)\\ \text{Poisson}}}{\overset{(2.95)}{=}} -\frac{1}{\varepsilon}\int d^3\underline{r}'\, \phi(\underline{r}')\,\delta(\underline{r}-\underline{r}') + \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3\underline{r}'\, G(\underline{r},\underline{r}')\, \varrho(\underline{r}') =$$

$$\underset{\text{2. Green}}{\overset{(2.88)}{=}} \int_{\partial V} df' \left\{ \phi(\underline{r}')\frac{\partial G}{\partial n'} - G(\underline{r},\underline{r}')\frac{\partial \phi}{\partial n'} \right\} \quad (2.99)$$

$\therefore$ Folgt in Erweiterung von (2.96):

$$\phi(\underline{r}) = \int_V d^3\underline{r}'\, \varrho(\underline{r}')\, G(\underline{r},\underline{r}')$$
$$- \varepsilon_0 \int_{\partial V} df' \left\{ \phi(\underline{r}')\frac{\partial G}{\partial n'} - G(\underline{r},\underline{r}')\frac{\partial\phi}{\partial n'} \right\} \quad (2.100)$$

- Wähle nun $f(\underline{r},\underline{r}')$ so, dass eine Integralgleichung vermieden wird:

<u>i) Dirichlet:</u> $\int_{\partial V} df'\, G_D(\underline{r},\underline{r}')\frac{\partial\phi}{\partial n'} = 0,$

oft realisiert durch $G_D(\underline{r},\underline{r}') = 0$ für $\underline{r}' \in \partial V$ (2.101)

<u>ii) Neumann:</u>

$$\varepsilon_0 \int df'\, \phi(\underline{r}')\frac{\partial G_N(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'} = -\phi_0 = \text{const} \quad (2.102)$$

realisiert durch $\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\underline{r},\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0 |\partial V|}$ (2.103)

$\langle$ o.B. $\int_{\partial V} df' \frac{\partial G_N}{\partial n'} \overset{(2.96)}{=} -\frac{1}{\varepsilon_0}$, daher $\frac{\partial G_N}{\partial n'} \neq 0$

$$\phi_0 \underset{(2.103)}{\overset{(2.102)}{=}} \frac{1}{|\partial V|}\int_{\partial V} df'\, \phi(\underline{r}') \quad \rangle$$

28.4.