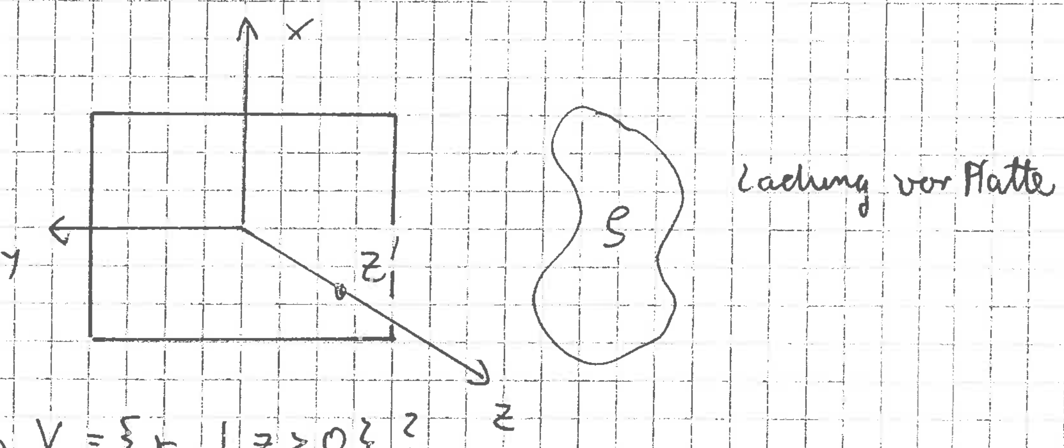
c) Beispiel: Geerdete Metallplatte in der x-y-Ebene



ϕ in $V = \{ \underline{r}, \mid z \geq 0 \}$?

$\phi (x, y, z = 0) = 0$ (Dirichlet, „geerdet")

$\phi (x = \pm\infty, y, z > 0) = \phi (x, y = \pm\infty, z > 0) = \phi (x, y, z = \pm\infty) = 0$

· Es gilt:

$$f_D(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0 \{ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gespiegelt}}}{+} z')^2 \}^{1/2}}$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r} - \underline{r}_B'|} \qquad (2.104)$$

$\underline{r}_B' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ -z' \end{bmatrix}$ ist der an der x-y-Ebene gespiegelte Vektor $\underline{r}'$

< Beweisskizze:

$$\Delta_{\underline{r}} f_D(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}_B') = 0 \quad \text{für } \underline{r} \in V, z' > 0$$

$$G_D(\underline{r}, \underline{r}') \overset{(2.97)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_B'|} \right\} = 0 \quad \text{für } z' = 0 \qquad (2.105)$$

>

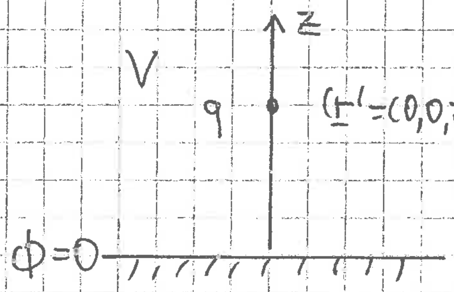
2.12. Methode der Bildladungen

a) Physikalische Interpretation der Bildpotenzialfunktion

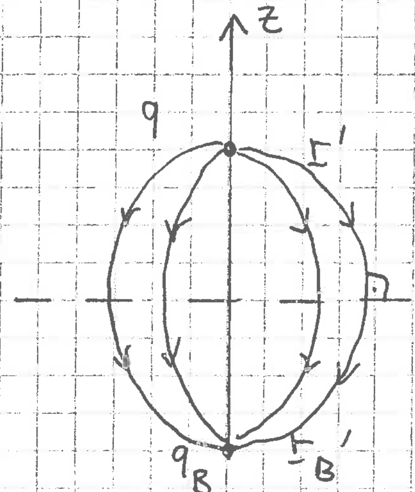
- $f(\underline{r}, \underline{r}')$ ist das Potenzial einer Ladungsverteilung außerhalb V (die Laplacegleichung in V erfüllend), das zusammen mit dem Potenzial $4\pi\varepsilon_0 \, |\underline{r} - \underline{r}'|^{-1}$ der Punktladung $q = 1$ bei $\underline{r}'$ für die geforderten Randbedingungen auf ∂V sorgt.

- Fiktive Bildladungen außerhalb V stören die Poissongleichung innerhalb V nicht.

b) <u>Punktladung über geerdeter, unendlich ausgedehnter Metallplatte</u>



$\rightarrow$



i) <u>Ansatz</u>

$$\phi(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r} + \underline{r}'|} \right\} \quad (2.106) \text{ vgl } (2.105)$$

löst die Poissongleichung in V mit $\phi|_{\partial V} = 0$

ii) <u>Elektrisches Feld</u>

- $$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} - \frac{\underline{r} + \underline{r}'}{|\underline{r} + \underline{r}'|^3} \right\} \quad (2.107)$$

- $$\underline{r} \in \partial V \Rightarrow \underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{r}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{bmatrix}, \quad \underline{r} \pm \underline{r}' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \pm z \end{bmatrix}$$

$$|\underline{r} \mp \underline{r}'|^3 = (x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}, \quad \underline{r} - \underline{r}' - \underline{r} - \underline{r}' = -2\underline{r}' = -2z' \, \hat{e}_z$$

$$\underline{E}(\underline{r}\in\partial V) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{(x^2+y^2+z'^2)^{3/2}}\,\hat{e}_z \quad \perp \text{ Platte} \qquad (2.108)$$

iii) Induzierte Flächenladungsdichte

- Wegen (2.93) gilt:

$$\sigma = \varepsilon_0 E_a^{(n)} = \varepsilon_0 E(\underline{r}\in\partial V) = -\frac{q}{2\pi}\frac{z'}{(x^2+y^2+z'^2)^{3/2}} \qquad (2.109)$$

- Gesamte Influenzladung:

$$\bar{q} = \int_{\partial V} df\,\sigma \overset{\text{ebene}}{\underset{\text{Pol.Koord.}}{=}} \int_{\partial V} d\varrho\, d\varphi\, \varrho\,\sigma = -q\int_0^\infty d\varrho\,\varrho\,\frac{z'}{(\varrho^2+z'^2)^{3/2}} =$$

$$= -q z' \int_0^\infty d\varrho \left\{-\frac{d}{d\varrho}(\varrho^2+z'^2)^{-1/2}\right\} = -q \qquad (2.110)$$

- Entspricht genau der Bildladung

iV) Bildkraft

- Kraft der Platte auf die Ladung = Bildkraft

$$\underline{F} := \underline{F}_{\text{Platte auf } q} = \text{Kraft von Bildladung auf } q = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2z')^2}\hat{e}_z \overset{?}{=}$$

$$-\underline{F}_{q \text{ auf Platte}} =: -\underline{\tilde{F}} \qquad (2.111)$$

$$\underline{\tilde{F}} = \hat{e}_z \int_{\partial V} df\,\sigma\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nur Feld von } q}}{\frac{1}{2}} E_a^{(n)} \overset{(2.109)}{=} \hat{e}_z \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_{\partial V} df\,\sigma^2$$

$$\overset{(2.109)}{=} \hat{e}_z \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{q^2}{2\pi}\int_0^\infty d\varrho\,\frac{\varrho z'^2}{(\varrho^2+z'^2)^3} =$$

$$= \hat{e}_z \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty d\varrho\,\frac{d}{d\varrho}\frac{z'^2(-1/4)}{(\varrho^2+z'^2)^2} = \hat{e}_z\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2z'}\right)^2 \qquad (2.112) \text{ vgl. } (2.111)$$

3 Elektrostatik makroskopischer Medien

3.1. Die dielektrische Verschiebung

a) Bemerkungen

- Bisherige Theorie gültig bis zu atomistischer Skala
- In dichter Materie erfolgen mikroskopische Fluktuationen der Ladungen von Protonen und Elektronen in den Atomen. Man beobachtet ein makroskopisches Mittel

$$\overline{f(\underline{r},t)} = \frac{1}{V(\underline{r})} \int_{V(\underline{r})} d^3\underline{r}'\, f(\underline{r}',t) \overset{\underline{r}'':=\underline{r}'-\underline{r}}{=}$$

$$= \frac{1}{V(\underline{r})} \int_{V(D)} d^3\underline{r}''\, f(\underline{r}''+\underline{r}) \qquad (3.1)$$

$f(\underline{r},t)$: Mikroskopische Feldgröße

$V(\underline{r})$: Mikroskopisch großes, makroskopisch kleines Kugelvolumen bei $\underline{r}$, zB $V = 10^{-3}\,mm^3$ mit 10^{17} Teilchen

⟶ NB! $\quad \nabla \overline{f} = \overline{\nabla f} \qquad (3.2)$

- Bei Anlegen eines äußeren Feldes $\underline{E}(\underline{r})$: Es werden in der molekularen Ladungsdichte Multipolmomente induziert, vorwiegend Dipolmomente, beschrieben durch eine elektrische Polarisation $\underline{P}$ = Dipolmoment pro Volumeneinheit ($As \cdot m \cdot m^{-3}$).
- Molekulare Ladungen (Monopole) mitteln sich heraus.

24.4.

b) Makroskopische Feldgrößen und Maxwellgleichungen

- $\varrho(\underline{r}) = \varrho_{frei}(\underline{r}) + \overline{\varrho_{Atom}(\underline{r})} = \varrho_{frei}(\underline{r})$ (3.3)

- $\underline{P}(\underline{r}) = \sum_i N_i(\underline{r})\, \underline{p}_i(\underline{r})$ (3.4)

  N_i : Mittlere Anzahl von Molekülen des Typs i bei $\underline{r}$ pro Volumeneinheit, $\underline{p}_i$ deren Dipolmoment.

- $\underline{E}(\underline{r})$ makroskopisches elektrisches Feld.

- Wegen (3.2) gilt $\quad \operatorname{rot} \underline{E} = 0$ (3.5)

- Deshalb gibt es weiterhin ein Potential $\phi(\underline{r})$

- Potenzialbeitrag $\delta\phi(\underline{r}, \underline{r}')$ bei $\underline{r}$ von Volumen $v(\underline{r}')$:

  NB! $\quad 4\pi\varepsilon_0 \phi \overset{(2.40)}{=} \frac{q}{r} + \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}$, also

$$\delta\phi(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{\varrho(\underline{r}')\, v(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{\underline{P}(\underline{r}')\cdot(\underline{r}-\underline{r}')\, v(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \right\} \quad (3.6)$$

- Gesamtpotenzial $\quad (v(\underline{r}') \longrightarrow d^3\underline{r}')$:

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\underline{r}' \left\{ \frac{\varrho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \underline{P}(\underline{r}') \overbrace{\nabla_{\underline{r}'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}^{(2.14)} \right\} \quad (3.7)$$

- $4\pi\varepsilon_0 \operatorname{div} \underline{E} = -4\pi\varepsilon_0 \Delta_{\underline{r}} \phi(\underline{r}) =$

$$= -\int d^3\underline{r}' \left\{ \varrho(\underline{r}')\, \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \underline{P}(\underline{r}')\, \nabla_{\underline{r}'} \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right\} =$$

$$= \underbrace{4\pi\varrho(\underline{r})}_{(2.48)} + 4\pi \int d^3\underline{r}'\, \underline{P}(\underline{r}') \cdot \underbrace{\nabla_{\underline{r}'}\, \delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{-\nabla_{\underline{r}}\, \delta(\underline{r}-\underline{r}')} =$$

$$= 4\pi \left\{ \varrho(\underline{r}) - \operatorname{div} \underline{P}(\underline{r}) \right\} \quad (3.8)$$

• Definiere als Hilfsfeld die dielektrische Verschiebung

$$\boxed{\underline{D}(\underline{r}) = \varepsilon_0 \, \underline{E}(\underline{r}) + \underline{P}(\underline{r})} \qquad (3.9)$$

• Folgen die Maxwellgleichungen der Elektrostatik

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{D} = \rho \, , \; \operatorname{rot} \underline{E} = \underline{0}} \qquad (3.10)$$

c) Interpretationen

• $\underline{D}$ wird von echten Überschussladungen erzeugt, Ist materieunabhängig, im Gegensatz zu $\underline{E}$, das über $\underline{P}$ vom Stoff abhängt.

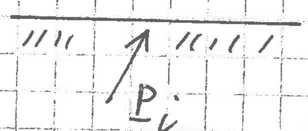
• Definiere „Polarisationsladungsdichte"

$\rho_P = -\operatorname{div} \underline{P}$ „Polarisationsfeld" $\underline{E}_P := -\frac{1}{\varepsilon_0} \underline{P}$ (3.11)

und $\underline{E}_0 := \frac{1}{\varepsilon_0} \underline{D}$

• Folgt: $\operatorname{div} \underline{E} =: \operatorname{div}(\underline{E}_0 + \underline{E}_P) = \frac{1}{\varepsilon_0} \{ \rho + \rho_P \}$ (3.12)

• Beispiel: Oberfläche:



$$\hat{n} \cdot (\underline{P}_a - \underline{P}_i) \overset{(2.67)}{=} -\sigma_P$$

$\uparrow$

$-\varepsilon_0 \underline{E}_a + \varepsilon_0 \underline{E}_i \qquad \sigma_P = \hat{n} \cdot \underline{P}_i$, da $\underline{P}_a = 0$

5.5