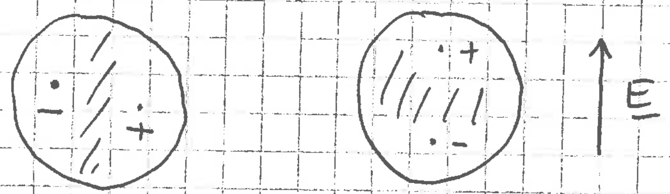
3.2. Materialgleichungen

a) Elektrika

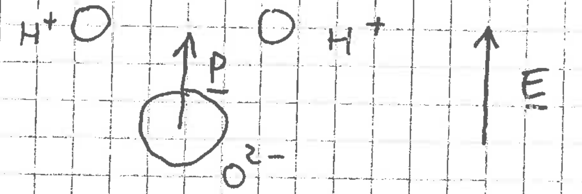
· Dielektrikum:

Relative Verschiebung der gebundenen positiven und negativen Ladungen: Deformationspolarisation



· Paraelektrikum

Ordnen von permanenten Dipolen (z.B. H_2O)
Orientierungspolarisation



· Ferroelektrikum

Permanente Dipole, die sich unterhalb der kritischen (Curie-) Temperatur T_c spontan ausrichten ($BaTiO_3$). Wird im Folgenden nicht betrachtet.

b) Dielektrizitäts konstante

· Für ein Di- und ein Paraelektrikum gilt:

$$\underline{P} = \underline{P}(\underline{E}), \quad \underline{P}(\underline{0}) = \underline{0} \qquad (3.13)$$

- Entwicklung nach Potenzen von $\underline{E}$

$$P_i = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^{3} \chi^{(1)}_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^{3} \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \dots \right\} \qquad (3.14)$$

$\chi^{(1)}_{ij}$: Linearer Suszeptibilitätstensor

$\chi^{(2)}_{ijk}$: Suszeptibilitätstensor 2. Ordnung etc.

- Standard: Abbruch nach linearer Ordnung $\underline{\underline{\chi}} := \underline{\underline{\chi}}^{(1)}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{P} &= \underline{\underline{\chi}}\, \varepsilon_0 \underline{E} && (3.15) \\ \underline{D} &= (1 + \underline{\underline{\chi}})\, \varepsilon_0 \underline{E} =: \underline{\underline{\varepsilon}}\, \varepsilon_0 \underline{E} && (3.16) \end{aligned}}$$

- $\underline{\underline{\varepsilon}}$: (relativer) Dielektrizitätstensor

- Isotropie: $\underline{\underline{\chi}} = \chi \underline{1}$, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon \underline{1}$

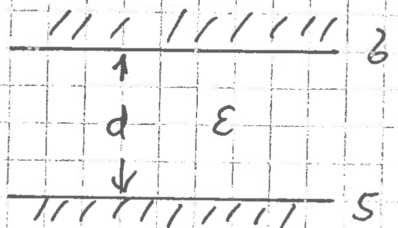
$\underline{P} = \chi \varepsilon_0 \underline{E}$, $\underline{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \underline{E}$, ε relative Dielektrizitätskonstante

- NB! $\underline{\underline{\chi}}$ und $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sind „Antwortfunktionen". Allgemein:

$$\underline{D}(\underline{r}, t) = \varepsilon_0 \int dt' \int d^3\underline{r}'\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{r}, \underline{r}', t, t')\, \underline{E}(\underline{r}', t') \qquad (3.17)$$

c) Kondensator

$C = \frac{q}{U}$ (2.61)



- Flächenladungsdichte

aus (2.64) und (3.10) $\operatorname{div} D = \rho$

$$\sigma = \underline{D} \cdot \hat{n} = D = \varepsilon\varepsilon_0 E \qquad (3.18)$$

$$U = E d \overset{(3.18)}{=} \frac{d}{\varepsilon\varepsilon_0} D \qquad (3.19)$$

$$q = \sigma S \overset{(3.18)}{=} D S \qquad (3.20)$$

$$\Rightarrow \quad C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d} \qquad (3.21) \quad \text{vgl. } (2.67)$$

- Kapazität wird durch $\varepsilon > 1$ erhöht
  (H_2O: $\varepsilon = 81$, Keramik Kondensatoren z.B. TiO_2 mit Beimischungen, $AlSiO_2$ etc: $6 < \varepsilon < 14.000$)

3.3. Randwertprobleme, elektrostatische Energie

a) Poissongleichung

- Wegen $\text{rot}\, \underline{E} \overset{(3.10)}{=} \underline{0}$ gibt es weiterhin ein Potenzial ϕ mit $\underline{E} = -\nabla\phi$
- Eingesetzt in $\text{div}\, \underline{D} = \text{div}\, \underline{\underline{\varepsilon}}\, \varepsilon_0 \underline{E} = \varrho$:

$$\nabla (\underline{\underline{\varepsilon}} \nabla \phi) = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}, \quad \text{d.h.}$$

$$\sum_{k,j=1}^{3} \partial_j \varepsilon_{jk} \partial_k \phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad (3.22)$$

- Medium isotrop und homogen

$$\Delta \phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (3.23)$$

b) Stetigkeitsbedingungen

- Gauß-Kästchen (2.64) mit $\underline{D}$ statt $\varepsilon_0 \underline{E}$,
  Stokes-Fläche (2.68) mit $\underline{E}$:

$$\left.\begin{aligned} \hat{n}\cdot(\underline{D}_a - \underline{D}_i) &= \sigma \\ (\hat{t}\times\hat{n})\cdot(\underline{E}_a - \underline{E}_i) &= \underline{0} \end{aligned}\right\} \quad (3.24)$$

· Ungeladene Grenzflächen:

$$\left.\begin{aligned} D_{1n} = D_{2n} \quad &\Longleftrightarrow \quad E_{1n} = \frac{\varepsilon^{(2)}}{\varepsilon^{(1)}} E_{2n} \\ E_{1t} = E_{2t} \quad &\Longleftrightarrow \quad D_{1t} = \frac{\varepsilon^{(1)}}{\varepsilon^{(2)}} D_{2t} \end{aligned}\right\} \quad (3.25)$$

$\varepsilon^{(1)} \neq \varepsilon^{(2)}$: Beide Felder sind nicht stetig

c) Elektrostatische Feldenergie

· Im Vakuum:

$$W_{Vak} = \frac{1}{2}\int d^3\underline{r}\ \rho(\underline{r})\ \phi(\underline{r}) \qquad (2.74)$$

· Bei makroskopischen Medien: W wie W_{Vak}, aber

- ρ: freie Ladungen
- ϕ: Potenzial von freien und Polarisationsladungen

· Änderung von W, wenn die Ladungsdichte von ρ zu $\rho + \delta\rho$ übergeht:

$$\delta W = \int d^3\underline{r}\ \delta\rho(\underline{r})\ \phi(\underline{r}) \overset{(3.10)}{=} \int d^3\underline{r}\ \phi\ \mathrm{div}\,(\delta\underline{D}) =$$

$$= \int d^3\underline{r}\ \{\underbrace{\mathrm{div}(\phi\,\delta\underline{D})}_{\text{Oberflächenintegral mit Gauß} \to 0} - \nabla\phi\,\delta\underline{D}\}$$

$$= \int d^3\underline{r}\ \underline{E}\cdot\delta\underline{D} \qquad (3.26)$$

• Folgt: $W = \int d^3\underline{r} \int_0^{\underline{D}} d\underline{D} \cdot \underline{E}$ (3.27)

• Lineares Medium: $\underline{D} \overset{(3.16)}{=} \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E}$:

$$\underline{E} \cdot d\underline{D} = \underline{E} \cdot d(\varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{E}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 d\,(\underline{E} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{E})$$

$$= \frac{1}{2} d\,(\underline{E} \cdot \underline{D})$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} \int d^3\underline{r}\; \underline{E} \cdot \underline{D}} \quad (3.28)$$

26.4.

4. Magnetostatik

- Elektrostatische Felder: Entstehen durch ruhende Ladungen, erzeugen Kraft auf Ladungen

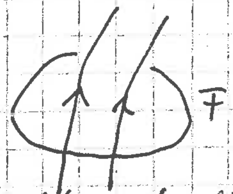
- Magnetostatische Felder: Entstehen durch stationäre elektrische Ströme, erzeugen Kraft auf andere Ströme

4.1. Der elektrische Strom

a) Stromdichte $\underline{j}$

- Ist i.A. ein zeitabhängiges Vektorfeld $\underline{j}(\underline{r},t)$

- $I = \int_F d\underline{f} \cdot \underline{j}(\underline{r},t)$ = Stromstärke



= Ladung, die pro Zeiteinheit durch Fläche F fließt (4.1)

- $\underline{j}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)\, \underline{v}(\underline{r},t)$ (4.2)

  ρ Ladungsdichte, $\underline{v}$ Ladungsgeschwindigkeit

- Einheit: $\underline{j}$ $[A m^{-2}]$, I $[A = C s^{-1}]$

b) Ladungserhaltung

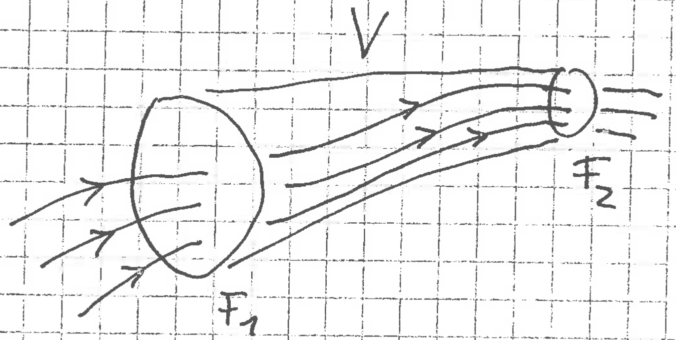
- Sei V ein zeitunabhängiges Volumen

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\underline{r}\; \rho(\underline{r},t) = \int_V d^3\underline{r}\; \frac{\partial \rho}{\partial t}(\underline{r},t) =$$

$$= - \int_{\partial V} \partial \underline{f} \cdot \underline{j}(\underline{r},t) = - \int_V d^3\underline{r}\; \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r},t) \qquad (4.3)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0} \qquad (4.4)$$

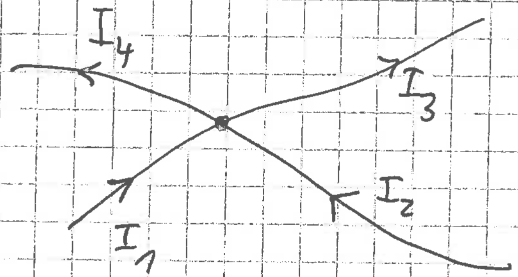
- Magnetostatik: $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \underline{j} = 0$ (4.5)
- Folge: Gesamtstrom durch jeden Leiterquerschnitt gleich.



$$0 = \int_V d^3\underline{r}\ \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r}) = \int_{\partial V} d\underline{f}\, \underline{j} = \int_{F_1} d\underline{f}\cdot \underline{j} + \int_{F_2} d\underline{f}\cdot \underline{j}$$

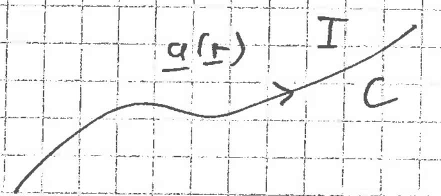
$$= -I_1 + I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2 \qquad (4.6)$$

- Ähnlich: Kirchhoffsche Regel:



$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 \qquad (4.7)$$

c) Stromfaden



$$\underline{j}(\underline{r}) = I \int_C d\underline{a}\ \delta(\underline{r} - \underline{a}) = I \int ds \underbrace{\frac{d\underline{a}}{ds}}_{\text{Tangenzialvektor}} \delta(\underline{r} - \underline{a}(s)) \qquad (4.8)$$

d) Ohmsches Gesetz

- Allgemein:

$\underline{E}$-unabhängig, lineare Antwort

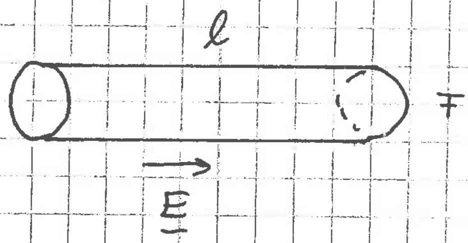
$$\boxed{\underline{j}(\underline{r}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{r})\ \underline{E}(\underline{r})} \qquad (4.9)$$

• $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{r})$: Symmetrischer(!) Tensor der elektrischen Leitfähigkeit:

$$\left[\frac{A}{Vm}\right] =: \left[S(\text{iemens})\, m^{-1}\right] \qquad (4.10)$$

• $\underline{\underline{\rho}}(\underline{r}) := \underline{\underline{\sigma}}^{-1}(\underline{r})$: Tensor des spezifischen elektrischen Widerstands: $\left[\frac{V}{A} m\right] =: [\Omega m]$, „Ohm" (4.11)

• Speziell:



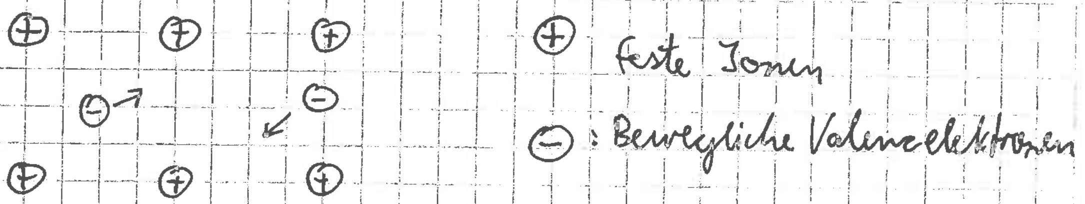
• Homogener Leiter, $\underline{\underline{\rho}} = \rho\, \underline{\underline{1}} = \text{const}$, Querschnittsfläche F, Strom I. Folgt:

$$j \overset{(4.1)}{=} \frac{I}{F}, \quad U \overset{(2.20)}{=} \ell \cdot E \overset{(4.11)}{=} \ell \rho j = \frac{\ell \rho}{F} I \qquad (4.12)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} U = R\cdot I, \quad I = S \cdot U & \\ R = \dfrac{\ell\rho}{F} : & \text{Widerstand } [\Omega] \\ S = \dfrac{F\sigma}{\ell} : & \text{Leitwert } [S] \end{array}} \qquad (4.13)$$

~~8.5~~

e) Drude-Modell für metallische Leiter



• t_j : Zeit seit letztem Stoß von Elektron j

$\underline{v}_j$: Damalige Geschwindigkeit