• Mittlere Elektronengeschwindigkeit ($q_{el} = -e$, $e = |e|$)

$$\overline{\underline{v}} = \frac{1}{N}\sum_j \left\{ \underline{v}_j - \frac{e}{m}\underline{E}\, t_j \right\} \qquad (4.14)$$

$\underline{v}_j$ sei isotrop verteilt, $\sum_j \underline{v}_j = \underline{0}$

$\tau := \frac{1}{N}\sum_j t_j$: mittlere Stoßzeit

• Folgt: $\overline{\underline{v}} = -\frac{e\tau}{m}\underline{E}$ und

$$\underline{j} \overset{(4.2)}{=} \rho\,\underline{v} = -en\,\overline{\underline{v}} = \frac{e^2 n \tau}{m}\underline{E}$$

n = Elektronenzahldichte $= \frac{N}{V}$, also:

$$\boxed{\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m}} \qquad (4.15)$$

f) Elektrische Leistung

• Arbeit an einer Ladung

$$W = q\int d\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = q\int dt\,\frac{d\underline{r}}{dt}\,\underline{E}(\underline{r}(t)) =$$

• Leistung: $\frac{dW}{dt} = q\,\underline{v}\cdot\underline{E} \qquad (4.16)$

• Leistung pro Volumeneinheit:

$$\frac{\dot{W}}{V} = \rho\,\underline{v}\cdot\underline{E} \overset{(4.2)}{=} \underline{j}\cdot\underline{E} = \text{„Leistungsdichte"} \qquad (4.17)$$

• Gesamtleistung: $P = \int d^3\underline{r}\ \underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{E}(\underline{r},t) \qquad (4.18)$

wird bei ohmscher Leitung in Wärme gewandelt.

• Stromfaden:

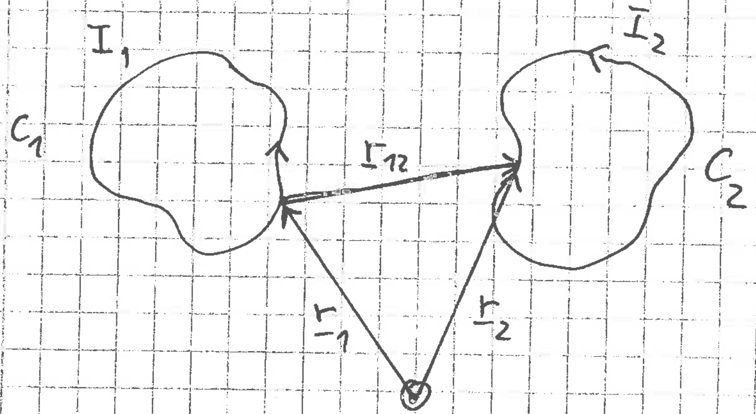
$$P \overset{(4.8)}{=} \int d^3\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r},t) \cdot I \int d\underline{a}\ \delta(\underline{r}-\underline{a}) =$$

$$= I \int d\underline{a}\ \underline{E}(\underline{a},t) = I \cdot U \overset{(4.13)}{=} R I^2 = \frac{1}{R} U^2 =$$

$$= \text{„Verlustleistung"} \qquad [VA = W = J s^{-1}] \qquad (4.19)$$

4.2. Grundlagen der Magnetostatik

a) Amperegesetz



· Kraft von Leiter 1 auf Leiter 2:

$$\underline{F}_{12} = k_f\, k_m\, I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\underline{r}_1 \times (d\underline{r}_2 \times \underline{r}_{12})}{|\underline{r}_{12}|^3} \qquad (4.20)$$

$$k_{m\,SI} = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \approx 1{,}2566 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2} \qquad (4.21)$$

$$k_{f\,SI} = 1$$

$$k_{m\,CGS} = \frac{1}{c} \qquad c = 2{,}99792458 \cdot 10^{10}\ cm\, s^{-1} \qquad (4.22)$$

$$k_{f\,CGS} = \frac{1}{c}$$

· Warum? Elektromagnetische Strahlung und spezielle Relativitätstheorie

NB! $$\frac{k_{e\,SI}\,k_{m\,SI}}{k_{e\,SI}} \overset{(4.21)}{\underset{(2.4)}{=}} \frac{\mu_0}{4\pi}\,4\pi\varepsilon_0 \overset{(4.21)}{\underset{(2.5)}{=}} \frac{1}{c^2} = \frac{k_{e\,CGS}\,k_{m\,CGS}}{k_{e\,CGS}} \qquad (4.23)$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1 \qquad (4.24)$$

μ_0: magnetische Permeabilität des Vakuums

- Umformung:

$$d\underline{r}_1 \times (d\underline{r}_2 \times \underline{r}_{12}) = d\underline{r}_2\,(d\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_{12}) - \underline{r}_{12}\,(d\underline{r}_1 \cdot d\underline{r}_2) \qquad (4.24)$$

Erster Summand:

$$\oint_{C_1} d\underline{r}_1 \cdot \frac{\underline{r}_{12}}{r_{12}^3} = \oint_{C_1} d\underline{r}_1 \cdot \nabla_{\underline{r}_1} \frac{1}{r_{12}} = 0$$

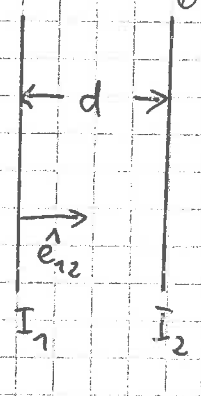
Bleibt:

$$\underline{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1}\oint_{C_2} d\underline{r}_1 \cdot d\underline{r}_2 \,\frac{\underline{r}_{12}}{r_{12}^3} \qquad (4.25)$$

d.h. $d\underline{r}_1$ und $d\underline{r}_2$ sind in (4.20), (4.24) vertauschbar

6.5.

b) Parallele Leiterdrähte



- Kraft pro Länge, die von 1 auf 2 ausgeübt wird:

$$\underline{f}_{12} = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d}\,\hat{e}_{12} \qquad (4.26)$$

- Anziehend bei gleichgerichteten Strömen
- Vgl. Definition Ampère (2.16) i)):

$$I_1 = I_2 = 1\,,\; d = 1 \;\Rightarrow\; f_{12} = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$$

- Damit ist μ_0 festgelegt

c) Magnetische Induktion

- Vgl. Definition elektrisches Feld (2.1), (2.7):

$$\underline{F}_{12} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{r}_{12}}{r_{12}^3} = q_2 \underline{E}_1 , \quad \underline{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{r}_{12}}{r_{12}^3} .$$

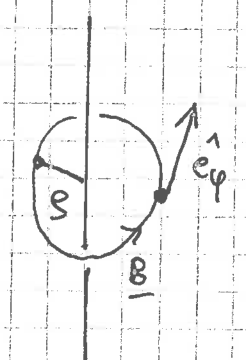
- Definiere analog die von Schleife I_1 erzeugte magnetische Induktion B_1:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{F}_{12} &= I_2 \oint_{C_2} d\underline{r}_2 \times \underline{B}_1(\underline{r}_2) && (4.27) \\ \underline{B}_1(\underline{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\underline{r}_1 \times \underline{r}_{12}}{r_{12}^3} && (4.28) \end{aligned}}$$

(4.28): „Biot-Savart-Gesetz"

- Magnetische Induktion eines geraden Leiters

$$\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi\varrho} \hat{e}_\varphi \quad (4.29)$$



d) Biot-Savart-Gesetz für kontinuierliche Ladungsverteilung

- Vgl. Stromfaden (4.8):

$$\int_V d^3r \, \underline{j}(\underline{r}) = \int_V d^3\underline{r} \; I_2 \int_C d\underline{r}_2 \, \delta(\underline{r}-\underline{r}_2) = I_2 \int_C d\underline{r}_2 \quad (4.30)$$

- Folgt für die magnetische Induktion (4.28):

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \qquad (4.31)$$

• Kraft auf Stromdichte in Verallgemeinerung von (4.27):

$$\boxed{\underline{F} = \int d^3\underline{r} \; \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r})} \qquad (4.32)$$

• Kraftdichte auf ϱ und $\underline{j} = \varrho \underline{v}$:

$$\boxed{\underline{f} = \varrho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B}} \qquad (4.33)$$

• Punktladung

$$\underline{F} = q \, (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B} \qquad (4.34)$$

„Lorentzkraft" abgeleitet aus Coulomb- und Ampèregesetz.

e) Dimension der magnetischen Induktion $\underline{B}$

SI, vgl (4.29) $\underbrace{\frac{Vs}{Am}}_{\mu_0} \cdot \underbrace{\frac{A}{m}}_{I/\varrho} = \frac{Vs}{m^2} = \frac{N}{Am} = T$ (Tesla) (4.35)

< $[\text{Tesla}] = \dfrac{\text{Kraft}}{\text{Ladung} \times \text{Geschwindigkeit}} \neq [\text{Gauß}] = \dfrac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}$

1 Tesla entspricht 10 kG >

4.3. Maxwellgleichungen der Magnetostatik

• Nutze zur Umformung von (4.31):

$$\nabla_{\underline{r}} \times \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \left\{ \nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right\} \times \underline{j}(\underline{r}') = \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \qquad (4.39)$$

• Also ist

$$\underline{B}(\underline{r}) = \nabla_{\underline{r}} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\underline{r}' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (4.40)$$

ein reines Wirbelfeld und daher quellenfrei:

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{B} = 0 \iff \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{B} = 0} \qquad (4.41)$$

„Homogene Maxwellgleichung der Magnetostatik"

• Keine magnetischen Monopole!

• Zerlegung für Vektorfelder

$$\underline{a}(\underline{r}) = \operatorname{grad} \left\{ -\frac{1}{4\pi} \int d^3\underline{r}' \, \frac{\operatorname{div} \underline{a}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right\}$$

$$+ \operatorname{rot} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int d^3\underline{r}' \, \frac{\operatorname{rot} \underline{a}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right\} \qquad (4.42)$$

$$=: \underline{a}_\ell(\underline{r}) + \underline{a}_t(\underline{r})$$ (longitudinal and transversal)

• Folgt:

$$\underline{B}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int d^3\underline{r}' \, \frac{\operatorname{rot} \underline{B}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right\} =$$

$$\overset{(4.40)}{=} \operatorname{rot} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int d^3\underline{r}' \, \frac{\mu_0 \underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right\} \qquad (4.43)$$

- Es folgt die inhomogene Maxwellgleichung der Magnetostatik

$$\operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \qquad (4.44)$$

$$\Longleftrightarrow \int_{\partial F} d\underline{r} \cdot \underline{B} = \mu_0 \int_F \underline{j} \cdot d\underline{f} = \mu_0 I \qquad (4.45)$$

„Ampèresches Durchflutungsgesetz"

12.5.

4.4. Grundaufgabe der Magnetostatik

a) Vektorpotential

- Aus (4.43) folgt (als Lösung der homogenen Maxwellgleichung)

$$\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \qquad (4.46)$$

mit dem Vektorpotenzial

$$\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\underline{r}' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \qquad (4.47)$$

- Vgl. (2.16) für das skalare Potenzial.

- Homogenes $\underline{B}$-Feld: $\underline{A} = \frac{1}{2} \underline{B} \times \underline{r}$ (4.48)

b) Eichtransformationen

- Ersetze $\underline{A}$ durch $\underline{\tilde{A}} = \underline{A} + \operatorname{grad} \chi$ mit beliebiger (diffbarer) Funktion χ, dann ist

$$\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} = \operatorname{rot} \underline{\tilde{A}} \qquad (4.49)$$