• **Häufig verwendet: „Coulombeichung"**

$$\text{div}\, A = 0 \quad (4.50) \quad \text{verlangt} \quad \Delta\chi = -\text{div}\, \underline{A}_{alt}$$

- Dann wird aus der inhomogenen Maxwellgleichung

$$\text{rot}\, \underline{B} \overset{(4.46)}{=} \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta A \overset{(4.44)}{=} \mu j \quad \text{und}$$

$$\boxed{\Delta A = -\mu_0 j} \qquad (4.51)$$

• Entkoppelte Komponenten!

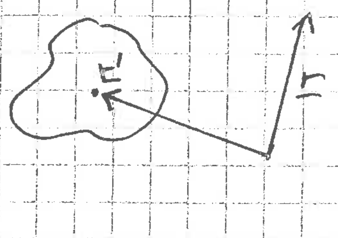
• **Grundaufgabe der Magnetostatik:**

- Gegeben $j\,|_V$, Randbedingung $\underline{A}\,|_{\partial V}$
- Gesucht: Lösung der partiellen, inhomogenen, elliptischen Differenzialgleichung 2. Ordnung (4.51) für jede Komponente von $\underline{A}$.
- Verfahren: wie bei ϕ, Abschnitte 2.10 – 2.11.

4.5 Das magnetische Moment

a) Multipolentwicklung

• Lokale Stromverteilung bei $\underline{r}'$, Vektorpotenzial bei $\underline{r}$



• Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$ wie in (2.39)

$$\frac{4\pi}{\mu_0}\,\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{r}\int d^3\underline{r}'\,\underline{j}(\underline{r}') + \frac{\underline{r}}{r^3}\int d^3r'\,\underline{r}'\otimes\underline{j}(\underline{r}') + \ldots \qquad (4.52)$$

• Es gilt für eine lokalisierte, divergenzfreie Stromverteilung $\underline{j}$ (o.B.)

$$\int d^3\underline{r}'\,\underline{j}(\underline{r}') = \underline{0} \qquad (4.53)$$

d.h. der Monopolterm in (4.52) verschwindet.

• Ferner gilt für einen beliebigen Vektor $\underline{a}$: (oB)

$$\underline{a}\cdot\int d^3\underline{r}'\,\{\underline{r}'\otimes\underline{j}(\underline{r}')\} = -\frac{1}{2}\,\underline{a}\times\int d^3\underline{r}'\,\{\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}')\} \qquad (4.54)$$

• Definiere <u>magnetisches Moment</u>

$$\underline{m} := \frac{1}{2}\int d^3\underline{r}\;\underline{r}\times\underline{j}(\underline{r}) \qquad (4.55)$$

so folgt bis zum Dipolterm in (4.52)

$$\boxed{\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\underline{m}\times\underline{r}}{r^3}} \qquad (4.56)$$

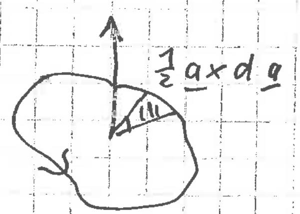
• Zugehörige <u>magnetische Induktion</u>

$$\boxed{\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A} \overset{\text{o.B.}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\underline{m}\left\{\frac{3\,\underline{r}\otimes\underline{r} - \underline{r}^2\cdot\underline{1}}{r^5}\right\}} \qquad (4.57)$$

Vgl. Dipolfeld $\underline{E}_D$ (2.30)

b) <u>Beispiele</u>

• <u>Leiterschleife (Stromfaden)</u>



$$\underline{m} \overset{(4.8)}{=} \frac{1}{2}\int d^3\underline{r}\;\underline{r}\times I\int_C d\underline{a}\;\delta(\underline{r}-\underline{a})$$

$$= \frac{1}{2}\,I\int_C \underline{a}\times d\underline{a} \underset{C\text{ eben}}{=} I\cdot\underline{F} \qquad (4.58)$$

- System von Punktladungen

$$\underline{j}(\underline{r}) = q \sum_{i=1}^{N} \underline{v}_i \, \delta(\underline{r} - \underline{R}_i) \qquad (4.59)$$

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int d^3\underline{r} \; \underline{r} \times q \sum_i \underline{v}_i \, \delta(\underline{r} - \underline{R}_i) = \frac{1}{2} q \sum_i \underline{R}_i \times \underline{v}_i =$$

$$= \frac{q}{2M} \sum_{i=1}^{N} \underline{\ell}_i \qquad (4.60)$$

- Gilt auch für Bahnmoment von Elektronen

Spin: $\frac{-eg}{2M} \underline{s}$, $g \approx 2$ „magnetomechanische Anomalie“ (4.61)

8.5

c) Kraft und Drehmoment auf lokale Stromverteilung

- Kraft:

$$\underline{F} \overset{(4.32)}{=} \int d^3\underline{r} \; \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r}) =$$ (nach Taylorentwicklung von $\underline{B}$ um $\underline{r} = \underline{0}$, erster nichtverschwindender Term)

$$\overset{(oB)}{=} \nabla \{\underline{m} \cdot \underline{B}(0)\} \qquad (4.62)$$

und $V_D = -\underline{m} \cdot \underline{B}$ (4.63) vgl. (2.35)(2.36) für $\underline{p}$

- Drehmoment:

$$\underline{M} \overset{oB}{=} \underline{m} \times \underline{B}(\underline{0}) \qquad (4.63)$$

vgl. (2.37)

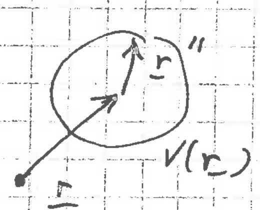
- Homogenes Magnetfeld übt keine Kraft auf einen Dipol aus, wohl aber ein Drehmoment.

4.6. Magnetostatik in Materie

a) Bemerkungen

- In dichter Materie gibt es atomare, stark fluktuierende Ströme. Makroskopische Mittelung erforderlich wie in (3.1):

$$\overline{f(\underline{r},t)} = \frac{1}{V(\underline{r})} \int_{V(\underline{r})} d^3\underline{r}'\, f(\underline{r}',t) \overset{\underline{r}''=\underline{r}'-\underline{r}}{=}$$



$$= \frac{1}{V} \int_{V(0)} d^3\underline{r}''\, f(\underline{r}''+\underline{r}) \qquad (4.64)$$

- Folgt $\nabla \overline{f} = \overline{\nabla f}$

- Folgt für makroskopisches, also gemitteltes $\underline{B}$-Feld:

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \qquad (4.65)$$

- Stromdichte: $\overline{j}(\underline{r}) = j_{frei} + \overline{j_{atom}} = j_{frei}$

- Mittlere Magnetisierung bzw. magnetische Momentendichte:

- $\underline{M}(\underline{r}) = \sum_i N_i(\underline{r})\, \overline{\underline{m}}_i(\underline{r}) \qquad (4.66)$

  N_i: Mittlere Anzahl von Molekülen des Typs i bei $\underline{r}$ pro Volumeneinheit, $\overline{\underline{m}}_i$: deren mittleres magnetisches Moment.

NB! In der Magnetostatik ist die Stromdichte j_P der Polarisationsladungen $\rho_P = -\operatorname{div} \underline{P}$ (3.11) vernachlässigbar. Wegen der Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j}_P = 0 \qquad \text{folgt} \quad \underline{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \underline{P} \qquad (4.67)$$

was wir später bei der Dynamik berücksichtigen.

b) Makroskopische Feldgrößen und Maxwellgleichungen

- Beitrag der freien Stromdichte und der Magnetisierung im Volumen $v(\underline{r}')$ zum Vektorpotential, vgl (3.6):

$$\delta \underline{A}(\underline{r},\underline{r}') \overset{(4.52)}{\underset{(4.56)}{=}} \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\underline{j}(\underline{r}')\, v(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{\underline{M}(\underline{r}') \times (\underline{r}-\underline{r}')\, v(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \right\} \qquad (4.68)$$

- Gesamtes Vektorpotential: $v(\underline{r}') \to d^3\underline{r}'$ vgl. (3.6) (3.7):

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\underline{r}' \left\{ \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \underline{M}(\underline{r}') \times \nabla_{\underline{r}'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right\} \qquad (4.69)$$

$$\underline{M}(\underline{r}') \times \nabla_{\underline{r}'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\nabla_{\underline{r}'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \times \underline{M}(\underline{r}') =$$

$$\overset{\text{Prod. regel}}{=} -\nabla_{\underline{r}'} \times \frac{\underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{\operatorname{rot}_{\underline{r}'} \underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (4.70)$$

- Also:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\underline{r}' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left\{ \underline{j}(\underline{r}') + \operatorname{rot}_{\underline{r}'} \underline{M}(\underline{r}') \right\} + \underline{R}(\underline{r})$$

$$\underline{R}(\underline{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\underline{r}' \operatorname{rot}_{\underline{r}'} \frac{\underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (4.72)$$

- Es gilt für ein beliebiges Vektorfeld $\underline{w}(\underline{r})$

$$\int d^3\underline{r} \operatorname{rot} \underline{w}(\underline{r}) = \int_V d^3 r\, \nabla \times \underline{w}(\underline{r}) = \int d^3\underline{r}\, \nabla \cdot (-i \underline{\underline{L}}\, \underline{w}) =$$

$$\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot (-i \underline{\underline{L}}\, \underline{w}) = \int_{\partial V} d\underline{f} \times \underline{w}(\underline{r}) \qquad (4.73)$$

$$(L_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk} \quad , \quad -i \underline{\underline{L}}\, \hat{n} = \hat{n} \times$$

- Daher kann (4.72) in ein Oberflächenintegral umgeschrieben werden, das bei endlichem Träger von $\underline{M}$ verschwindet. >

- Folgt mit dem Zerlegungssatz für Vektorfelder (4.42), (4.43)

$$\mathrm{rot}\,\underline{B}(\underline{r}) = \mu_0\,\underline{j}(\underline{r}) + \mu_0\,\mathrm{rot}\,\underline{M}(\underline{r}) \qquad (4.74)$$

- Definiere das <u>Magnetfeld</u> (als Hilfsfeld):

$$\boxed{\underline{H} := \frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}} \qquad (4.75)$$

- Folgt: $\underline{B} = \mu_0\,(\underline{H} + \underline{M})$ (4.76)

und die inhomogene Maxwellgleichung in Materie:

$$\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j} \qquad (4.77)$$

$\underline{j}$: freie Stromdichte

- Dimension $[\underline{H}] = [\underline{M}] = A\,m^{-1}$ (4.78)

15.5

c) <u>Materialgleichungen</u>

- $\underline{M} = \underline{M}(\underline{H})$ Lineare Antwort.

$$\underline{M} = \underline{\underline{\chi}}_m \underline{H} \qquad (4.79)$$

mit dem Tensor der

magnetischen Suszeptibilität $\underline{\underline{\chi}}_m$