Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**
Mathematische Methoden der Physik **Blatt 2**
Priv. Doz. Dr. Johannes Roth Ausgabedatum: 21.10.2015

Aufgabe 4 (Schriftlich) Konvergenz von Integralen **7 Punkte**

(a) Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{x^\nu}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{mit} \quad \nu \in \mathbb{R}\,. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(b) Ermitteln Sie, für welche Werte von ν folgende Integrale konvergieren:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\nu}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^\nu}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^\nu}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^\nu}\,\mathrm{d}x\,. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

(c) Untersuchen Sie damit die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Wie verhält sich der Integrand für $x \to 0$ und für $x \to \infty$? Benutzen Sie im Fall $x \to 0$ die Taylorreihe für $\sin(x)$ um $x = 0$. (2 Punkte)

Aufgabe 5 (Schriftlich) Gamma-Funktion **7 Punkte**

(a) Die Gamma-Funktion $\Gamma(\nu)$ ist für $\nu > 0$ durch das Integral

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1}\exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

definiert. Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass die Gamma-Funktion die Beziehung

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$$

erfüllt. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie den Wert $\Gamma(1)$ und zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für natürliche Zahlen

$$\Gamma(n+1) = n!$$

gilt. Die Gamma-Funktion ist somit eine differenzierbare Erweiterung der Fakultät. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie durch Substitution, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \Gamma(1/2)\,. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 6 (Votier) Taylorreihen **6 Punkte**

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{\exp(-cx)}{d+x}$$

im Punkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe 2. Ordnung. Ermitteln Sie hierzu zunächst die Taylorreihenentwicklungen der Funktionen $\exp(-cx)$ und $1/(d+x)$. Welche Terme können vernachlässigt werden?

Aufgabe 7 (Votier) Vektoren **10 Punkte**

Betrachten Sie die drei Vektoren

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Betrag dieser Vektoren und alle möglichen Skalarprodukte. Welche Vektoren stehen senkrecht aufeinander? (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren eine Basis bilden, d.h. es gilt

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 \neq 0$$

außer für $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. (2 Punkte)

(c) Drücken Sie die kartesischen Basisvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_z$ in dieser neuen Basis aus. Geben Sie die Komponentendarstellung für diese Vektoren in der neuen Basis an. (5 Punkte)