Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**
Mathematische Methoden der Physik **Blatt 3**
Priv. Doz. Dr. Johannes Roth
Ausgabedatum: 28.10.2015
Abgabedatum: 5./6./7.11.2015

Aufgabe 8 (Votier) Innere Substitution — 6 Punkte

Berechnen Sie das Integral
$$\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-5+6x-x^2}} \, .$$
Verwenden Sie zunächst eine geeignete quadratische Ergänzung mit der Substitution $u = x+a$, um den Ausdruck unter der Wurzel zu vereinfachen. Bestimmen Sie a so, dass der lineare Term im Polynom in u entfällt. Suchen Sie danach ein geeignetes b, um das Integral mit Hilfe der Substitution $u = b\cos(v)$ berechnen zu können. Wie transformieren sich die Integralgrenzen? Fertigen Sie eine Skizze von $\sin(v)$ und $\cos(v)$ in einem relevanten Intervall an.

Aufgabe 9 (Votier) Taylorreihen — 6 Punkte

(a) Fertigen Sie eine Skizze der folgenden Funktionen an und entwickeln Sie diese in eine Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$ bis zur 4. Ordnung:
$$f(x) = \cos(x) \, , \quad g(x) = \frac{1}{1+x} \, .$$
(4 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe von
$$h(x) = \sqrt[3]{x}$$
um den Punkt $\tilde{x}_0 = 1$ bis zur 2. Ordnung. Skizzieren Sie diese Funktion. Kann $h(x)$ auch um den Punkt $x_0 = 0$ entwickelt werden? (2 Punkte)

Aufgabe 10 (Votier) Vektoren — 3 Punkte

Gegeben sind zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Die folgenden Aufgaben sollen ohne Verwendung der Komponenten-Schreibweise gelöst werden.

(a) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung
$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \, .$$
(1 Punkt)

(b) Beweisen Sie, dass der Vektor
$$\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a} - |\mathbf{a}^2|\,\mathbf{b}$$
senkrecht auf $\mathbf{a}$ steht. Betrachten Sie anschließend den Spezialfall $|\mathbf{a}| = 1$ und $|\mathbf{b}| < 1$. Die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ schließen zudem einen spitzen Winkel ein. Fertigen Sie eine Skizze an. (2 Punkte)

Aufgabe 11 (Schriftlich) Vektorrechnung **6 Punkte**

Gegeben sind die drei Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Parameter α und β so, dass der Vektor $\mathbf{c}$ senkrecht auf $\mathbf{a}$ und auf $\mathbf{b}$ steht. Benutzen Sie hierzu

(a) die Skalarprodukte $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ und $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$; (3 Punkte)

(b) das Vektorprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. (3 Punkte)

Aufgabe 12 (Schriftlich) Matrizen **9 Punkte**

Zeigen Sie am Beispiel der drei Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Gültigkeit der Rechenregeln

(a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, (3 Punkte)

(b) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ und (3 Punkte)

(c) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. (3 Punkte)