Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**

Mathematische Methoden der Physik **Blatt 4**

Priv. Doz. Dr. Johannes Roth

Ausgabedatum: 4.11.2015

Abgabedatum: 11./12./13.11.2015

Aufgabe 13 (Schriftlich) Komplexe Zahlen — 11 Punkte

(a) Vereinfachen Sie die komplexen Zahlen. Wie lauten diese in den Darstellungen $x + \mathrm{i}y$ und $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$?

$$z_1 = \mathrm{i}^4 \,, \quad z_2 = (\mathrm{i}-1)^2 \,,$$

$$z_3 = \frac{1}{\mathrm{i}-1} \,, \quad z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \,.$$

Tragen Sie diese Zahlen zusätzlich als Punkte in einem gemeinsamen Diagramm in die komplexe Ebene ein. (6 Punkte)

(b) Wie sieht die einfachste Form der komplexen Zahlen

$$z_5 = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4 \qquad \text{und} \qquad z_6 = \left(\frac{\sqrt{50}-\sqrt{8}\mathrm{i}}{7+3\mathrm{i}}\right)^{46}$$

aus? (3 Punkte)

(c) Gegeben sei $z = a + \mathrm{i}b$. Bringen Sie die folgenden komplexen Zahlen auf die Form $x + \mathrm{i}y$, d.h. bestimmen Sie $x = x(a,b)$ und $y = y(a,b)$.

$$z_7 = \frac{\bar{z}}{z} \,, \quad z_8 = \frac{1}{z+\mathrm{i}} \,.$$ (2 Punkte)

Aufgabe 14 (Votier) Komplexe Ebene — 9 Punkte

(a) Beschreiben Sie mit je einer eigenen Skizze die Menge der Punkte in der komplexen Ebene, die folgende Gleichungen oder Ungleichungen mit der komplexen Zahl z erfüllen:

$$\mathrm{Im}(z) \geq 2 \,, \quad \mathrm{Re}(z^2) = 1 \,, \quad |z| = 3 \,,$$

$$|z-3| < 2 \quad \text{und} \quad z^2 = -\bar{z}^2 \,.$$ (5 Punkte)

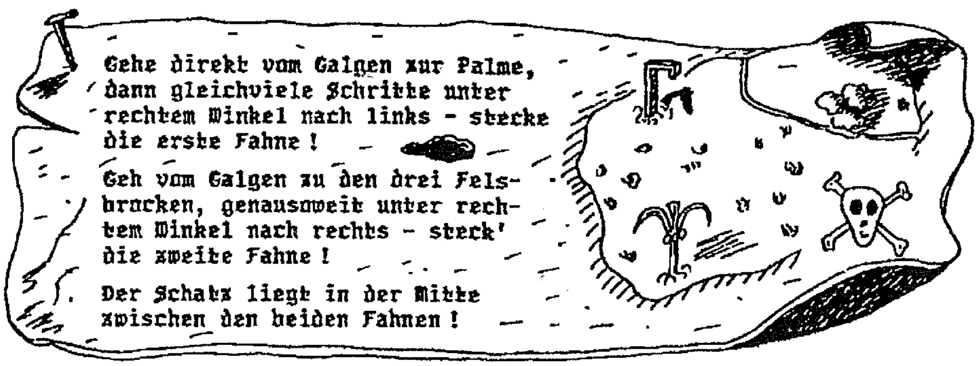
(b) Welcher Vektoroperation entspricht die Addition komplexer Zahlen in der komplexen Ebene? (1 Punkt)

(c) Welcher Vektoroperation entspricht die Multiplikation einer komplexen Zahl mit dem Faktor $e^{\mathrm{i}\alpha}$? (1 Punkt)
Hinweis: Verwenden sie die Darstellung in Polarkoordinaten ($re^{\mathrm{i}\varphi}$).

(d) Wie kann ein Punkt z der komplexen Ebene durch Addition (Subtraktion) und Multiplikation um einen anderen Punkt m gedreht werden (Drehwinkel α)? (2 Punkte)

Aufgabe 15 (Votier) Schatzsuche **6 Punkte**

Edward Teach, genannt Schwarzbart, war einst der gefürchtetste Pirat der Karibik. Er trug stets sechs Pistolen bei sich und vergrub seine Beute auf einer einsamen Insel vor Tortuga. Lange nachdem Teach im Kampf auf See gefallen war, fand man die Schatzkarte:



Die Palme und die Felsen waren noch da, der Galgen aber war längst abgetragen. Der Suchtrupp stieß trotzdem mit dem ersten Spatenstich auf die Schatzkiste, obwohl man die Schritte von der falschen Stelle aus gezählt hatte. War dies Zufall? Wo lag der Schatz?

Hinweise: Rechnen Sie in der komplexen Ebene. Zeigen Sie zunächst, dass eine Drehung um den Ursprung um 90° einer Multiplikation mit $\pm$i entspricht. Erinnern Sie sich ggf. auch an Aufgabe 14 (d). Benutzen Sie die komplexen Zahlen p, f, g, F_1 und F_2 für die Standorte der Palme, der Felsen, des Galgens und der beiden Fahnen. Beschreiben Sie das Endergebnis in Worten. Wie gelangen Sie direkt zum Schatz?