Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**
Mathematische Methoden der Physik **Blatt 5**
Priv. Doz. Dr. Johannes Roth
Ausgabedatum: 11.11.2015
Abgabedatum: 18./19./20.11.2015

Aufgabe 16 (Schriftlich) Riemannsche Blätter — 10 Punkte

(a) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi n)}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ an. Skizzieren Sie für $r = 1$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$, welche Linien sich für w und die Lösungen z ergeben. Zeichnen Sie je ein eigenes Diagramm für die w- und für die z-Ebene. (3 Punkte)

(b) Greifen Sie nun eine der vieldeutigen Lösungen für z heraus. In welchem Intervall müssen Sie φ variieren, damit sich die Linie für diese Lösung schließt? Wie viele Riemannsche Blätter benötigen Sie für die Eindeutigkeit der zugehörigen w-Werte? (2 Punkte)

(c) Skizzieren Sie, wie eine passende Aufteilung der z-Ebene aussehen könnte, damit alle Punkte innerhalb eines Teils der z-Ebene zu genau einem Riemannschen Blatt der w-Ebene gehören. (1 Punkt)

(d) Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen und veranschaulichen Sie diese in der komplexen Ebene:

$$z^2 = \mathrm{i}\,, \quad z^7 = 128\,. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Aufgabe 17 (Votier) Trigonometrische Funktionen — 12 Punkte

Mit den Exponentialdarstellungen

$$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \qquad \text{und} \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

können die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen elegant hergeleitet werden.

(a) Beweisen Sie die folgenden Beziehungen:

$$\sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) = \sin(x-y)\,,$$
$$\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) = \cos(x+y)\,. \qquad \text{(6 Punkte)}$$

(b) Berechnen Sie unter Ausnutzung der obigen Gleichungen den Real- und den Imaginärteil von $\sin(z)$ und $\cos(z)$ für $z = x + \mathrm{i}y$. Zeigen und benutzen Sie $\sinh(a) = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}a)$ und $\cosh(a) = \cos(\mathrm{i}a)$ mit

$$\sinh(a) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}) \qquad \text{und} \qquad \cosh(a) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{-a})\,. \qquad \text{(6 Punkte)}$$

Aufgabe 18 (Votier) Harmonischer Oszillator **7 Punkte**

Betrachten Sie die Differenzialgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + Dx(t) = 0$$

eines Federpendels mit der Masse m und der Federkonstanten D.

(a) Zeigen Sie, dass Sie mit dem Ansatz $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ zwei Lösungen dieser Gleichung finden können. Welche Werte ergeben sich dabei für λ? Wie lauten die beiden zugehörigen Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$? (3 Punkte)

(b) Die Differenzialgleichung ist linear, d.h. auch jede Superposition $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ mit beliebigen komplexen Zahlen a und b ist eine Lösung. Zeigen Sie, dass Sie durch eine geschickte Wahl von a und b zwei unabhängige, rein reelle Lösungen $x_{\mathrm{I}}(t)$ und $x_{\mathrm{II}}(t)$ angeben können. Erinnern Sie sich ggf. an Aufgabe 17. (3 Punkte)

(c) Lesen Sie aus Ihren Lösungen die Kreisfrequenz ω der Schwingung ab. (1 Punkt)