Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**

Mathematische Methoden der Physik **Blatt 6**

Priv. Doz. Dr. Johannes Roth

Ausgabedatum: 18.11.2015

Abgabedatum: 25./26./27.11.2015

Aufgabe 19 (Schriftlich) Differenzialgleichungen 1. Ordnung **9 Punkte**

Lösen Sie die Differenzialgleichungen mit den zugehörigen Anfangsbedingungen:

(a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = x^3 - \cos(x)\,, \qquad y(0) = 0\,; \qquad \text{(3 Punkte)}$$

(b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = \sin(x)\, y(x)\,, \qquad y(0) = 2\,; \qquad \text{(3 Punkte)}$$

(c)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = 3x^2 y(x)^2\,, \qquad y(0) = 1\,. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 20 (Votier) Differenzialgleichungen 1. Ordnung **8 Punkte**

(a) Geben Sie die Ableitung des Arkustangens an. Lösen Sie anschließend die Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) = (x + y)^2$$

mit Hilfe der Substitution $u = x + y$ für die Randbedingung $y(1) = -1$. (4 Punkte)

(b) Lösen Sie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) + 2xy(x) = 6x \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 2\,.$$

Untersuchen Sie dazu zunächst $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x) + 2xy(x) = 0$. Zeigen Sie anschließend, dass $y_\mathrm{p} = c$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung darstellt. Bestimmen Sie die Konstante c. Wie lautet die zugehörige allgemeine Lösung? (4 Punkte)

Aufgabe 21 (Votier) Gedämpfter harmonischer Oszillator 16 Punkte

In Aufgabe 18 haben Sie die Differenzialgleichung des harmonischen Oszillators kennengelernt. Betrachten Sie nun den *gedämpften* harmonischen Oszillator, für welchen gilt

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + \omega^2 x(t) = 0\ .$$

Gehen Sie von einer positiven Dämpfung $\gamma > 0$ und von $\omega > 0$ aus.

(a) Benutzen Sie einen Exponentialansatz. Wie lautet das charakteristische Polynom? Berechnen Sie die reellen Lösungen der Differenzialgleichung. Unterscheiden Sie die drei Bereiche

- $\gamma > \omega\,,$
- $\gamma = \omega$ und
- $\gamma < \omega\,.$

Führen Sie für den Fall $\gamma = \omega$ eine Variation der Konstanten durch. Welcher Unterschied besteht zum ungedämpften harmonischen Oszillator? (8 Punkte)

(b) Lösen Sie für $\omega = 4$ und die Dämpfungen

- $\gamma = 5\,,$
- $\gamma = 4$ und
- $\gamma = 2\sqrt{3} \approx 3.46$

das Anfangswertproblem $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$. Welcher Anregung entspricht dies? Skizzieren Sie die Lösungen in einem x-t-Diagramm und diskutieren Sie diese. Welche Lösung würde sich beim ungedämpften harmonischen Oszillator ergeben? (8 Punkte)